

Chapitre (AN) 3 Équations différentielles

- 1 Généralités
- 2 Linéaires du 1^{er} ordre
- 3 Linéaires du 2nd ordre à coefficients constants
- 4 Technique du changement de fonction inconnue
- 5 Exercices

D'après un théorème de LIOUVILLE, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive qui puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles (ln, exp, cos, sin etc.).

— Le saviez-vous ?

Parmi toutes les disciplines mathématiques, la théorie des équations différentielles est la plus importante. Elle fournit l'explication de toutes les manifestations élémentaires de la nature où le temps est impliqué.

— Sophus LIE

Résumé & Plan

Nous allons voir dans un chapitre un outil clef qui va nous permettre de modéliser divers phénomènes : la notion d'équations différentielles. Ce type d'objet apparaît naturellement dans de nombreux domaines : en électricité, en mécanique, en chimie (étude de la cinétique de en biologie (dynamiques de population) etc.

- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en PCSI, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.



Cadre

Dans tout ce chapitre,

- I désignera un intervalle réel, qui sera appelé le *domaine de définition de l'équation différentielle*, on le supposera non vide et non réduit à un point.
- L'entier n désignera l'ordre de l'équation différentielle, le plus souvent $n = 1, 2$.
- Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, tous les énoncés faisant intervenir $\mathbb{K}$ sont vrais que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Conformément au programme, nous étudierons mathématiquement uniquement les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. On début néanmoins par quelques considérations très générales sur le concept d'équations différentielles.

1

GÉNÉRALITÉS

Définition 1 | Dérivabilité n -ième

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On définit, sous réserve d'existence, les *dérivées successives* de f en posant $f^{(0)} = f$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.

Définition 2 | Équation différentielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Une *équation différentielle d'ordre n sur $\mathbb{K}$* toute équation en une fonction inconnue $y \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, et portant sur $y, y', \dots, y^{(n)}$.
- *Résoudre* une équation différentielle consiste à déterminer toutes les solutions de l'équation.

Définition 3 | Linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n sur $\mathbb{C}$* toute équation de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (E_n)$$

où $a_i \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La fonction $y \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ est appelée *inconnue* de (E_n) . On appelle *solution* de (E_n) toute fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable telle que :

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

Note Pour alléger les notations, on ne mentionne dans (E_n) en général pas la dépendance en t de y et ses dérivées, mais celle des fonctions a_i oui via $a_i(t)$

Note Si au moins l'une des fonctions a_i prend des valeurs complexes on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

- Elle est dite à coefficients constants si les fonctions $a_{n-1}, \dots, a_1$ sont constantes.
- *Résoudre* une équation différentielle consiste à trouver toutes les solutions.
- On appelle *courbe intégrale* toute courbe représentative d'une solution.

Attention

- Tout le cours sera établi lorsque le nom de la variable des fonctions est t : par contre, il vous faut savoir l'adapter à d'autres noms de variables (x, s etc.) voire à d'autres notations de dérivée (cf. en Physique par exemple).
- Puisque la variable des fonctions s'appelle par fois x , on utilise donc jamais x pour noter la fonction inconnue (contrairement aux équations standards portant sur des réels, où x désigne le plus souvent l'inconnue).

Il est très important de comprendre que l'on résout ici le problème en une **fonction** y : c'est l'inconnue de notre équation. Vous étiez habitués jusque là à résoudre des équations portant sur des réels ou des complexes.

Définition 4 | Homogène

- L'équation (E_n) est dite *homogène*, ou *sans second membre*, si b est la fonction nulle. (il n'y a donc que les termes en y)
- On appelle *équation homogène associée* à (E_n) ou encore *équation sans second membre associée* à (E_n) l'équation suivante :

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (H_n)$$

Notation

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E_n) , et $\mathcal{S}^0$ l'ensemble des solutions de (H_n) .

Remarque 1 (Forme normalisée $\iff$ Forme générale) Une équation de la forme

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

est encore appelée une équation différentielle linéaire d'ordre n . La forme faisant intervenir un coefficient 1 devant la dérivée s'appelle la *forme normalisée* de l'équation différentielle, elle s'obtient en divisant les deux membres par la fonction a_n sur tout intervalle J où a_n ne s'annule pas,

$$\forall t \in I \cap J, \quad y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1(t)}{a_n(t)}y' + \frac{a_0(t)}{a_n(t)}y = \frac{b(t)}{a_n(t)}.$$

Dans la suite tous les résultats seront énoncés pour la forme normalisée, i.e. celle des équations (E_n) et (H_n) .

Exemple 1 Préciser les caractéristiques des équations différentielles ci-après ; nom de la fonction inconnue, nom de la variable, ordre, ce que signifie qu'une fonction f est solution, homogène ou pas, etc.

1. $y' + ty = 0$.

Incon-nue	Variable	Ordre	Li-néaire ?	Homo-gène ?	« f est solution $\iff \dots$ »

2. $\frac{dq}{dt} = 3q$.

Incon- nue	Variable	Ordre	Li- néaire ?	Homo- gène ?	« f est solution ⇔ ... »

3. $2 - xz' = x^2 z''$.

Incon- nue	Variable	Ordre	Li- néaire ?	Homo- gène ?	« f est solution ⇔ ... »

4. $3x^3 y''' + 2x^2 y'' + y = \pi$.

Incon- nue	Variable	Ordre	Li- néaire ?	Homo- gène ?	« f est solution ⇔ ... »

$$\begin{array}{l} \text{Solution générale} \\ \text{de l'équation} \\ \text{COMPLÈTE} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Solution générale} \\ \text{de l'équation} \\ \text{HOMOGÈNE} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Solution} \\ \text{PARTICULIÈRE (= une} \\ \text{solution quelconque de} \\ \text{l'équation complète)} \end{array}$$

La preuve ci-dessous exploite très largement la linéarité de l'équation, ce résultat est faux dans le cas contraire.

Preuve On se fixe donc y_p vérifiant :

$$y_p^{(n)} + a_{n-1}(t)y_p^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y_p' + a_0(t)y_p = b(t).$$



STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DE (E_n) . Mais pourquoi introduire une version « homogène » d'une équation différentielle ? Nous allons constater que les ensembles des solutions de (E_n) et (H_n) possèdent un lien fort.

Théorème 1 | Structure des solutions de l'équation complète

Si $y_p : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une solution particulière de l'équation complète (E_n) , alors les solutions de (E_n) sont les éléments de :

$$\mathcal{S} = \{y_H + y_p \mid y_H \in \mathcal{S}_h\} \quad \text{où } \mathcal{S}_h \text{ est l'ensemble des solutions de } (H_n).$$

En résumé :

Les étapes de résolution d'une équation différentielle homogène sont maintenant claires :

1. calculer explicitement l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'homogène,
2. déterminer une solution particulière y_p de l'équation complète. Pour l'ordre 1, nous aurons une méthode systématique appelée *variation de la constante*, pour l'autre 2 nous devrons nous contenter de méthodes dans des cas particuliers.



Dans la suite de cette sous-section, on se fixe une équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$, avec $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Définition 5 | Définition pour $n = 1$

- On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* sur I toute équation de la forme (E_1) , c'est-à-dire une équation de la forme :

$$y' = a(t)y + b(t), \quad (E_1)$$

où $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

- L'équation homogène associée ou encore *équation sans second membre associée à (E_1)* est l'équation suivante :

$$y' = a(t)y. \quad (H_1)$$

Exemple 2

- $2y' = 3ty$ est homogène d'inconnue $y : t \mapsto y(t)$,
- $y' + e^x y = x^2 \cos(x)$ d'inconnue $y : x \mapsto y(x)$ L'équation homogène associée est $y' + e^x y = 0$.
- Pour E, τ deux réels, $\tau \frac{dv}{dt} + v = E$ d'inconnue $v : t \mapsto v(t)$ à coefficients constants et second membre constant. La fonction $v : t \mapsto E(1 - e^{-t/\tau})$ est une solution de cette équation car :



Remarque 2 (Non normalisée)

- $xy' + 2y = e^x$ n'est pas vraiment une équation différentielle linéaire du premier ordre à cause du terme xy' (on dit que c'est une équation différentielle *non normalisée*, voir la remarque idoine déjà faite dans le cas général).
- Pour la résoudre, on divise par x sur un intervalle où x ne s'annule pas. Il faudra donc travailler sur $\mathbb{R}_+^*$, puis faire le même travail sur $\mathbb{R}_-^*$. En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, et donc l'étude ne peut être faite directement sur $I = \mathbb{R}^*$.

2.1

Résolution de l'équation homogène

On connaît par un calcul direct l'ensemble des solutions de l'équation (H_1) .

Théorème 2 | Résolution de l'équation homogène

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (H_1) est :

$$\mathcal{S}_h = \left\{ t \mapsto \lambda e^{A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{où } A : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une primitive de } a.$$



Remarque 3 (Au sujet de $\mathbb{K}$)

- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — c'est-à-dire que a est à valeurs dans $\mathbb{R}$ — le théorème donne :

$$\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_1 = \left\{ t \mapsto \lambda e^{A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{où } A : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une primitive de } a.$$
- Mais comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut aussi lorsque a est à valeurs dans $\mathbb{R}$ décider de trouver toutes les solutions à valeurs complexes (c'est-à-dire choisir $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans le théorème), et auquel cas le théorème donnera :

$$\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_2 = \left\{ t \mapsto \lambda e^{A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{où } A : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une primitive de } a.$$
- Comme dans les deux cas e^A est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut noter que : $\mathcal{S}_1 = \{\text{Re } f \mid f \in \mathcal{S}_2\}$.

Preuve (Point clef — *Multiplier par e^{-A} , méthode du « facteur intégrant »*)

La fonction a étant continue sur I , elle admet une primitive A sur cet intervalle.

- Si y est dérivable, calculons tout d'abord $(e^{-A}y)'$.



Remarque 4 Il arrive parfois dans les sujets que l'équation différentielle homogène soit donnée (pour l'ordre 1) sous cette forme :

$$y' + \tilde{a}(t)y = 0.$$

On se ramènera alors à la forme du cours, puisque :

$$y' + \tilde{a}(t)y = 0 \iff y' = \underbrace{-\tilde{a}(t)}_{=a(t)}y.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est alors :

$$\mathcal{S}_h = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\} \quad \text{où } A : I \longrightarrow \mathbb{K} \text{ est une primitive de } a.$$

Bref, dans tous les cas, on essaie de mettre y' à gauche, seule, et le terme en y à droite, puis on applique le théorème du cours qui a le mérite de ne pas faire apparaître de signe « - » dans l'exponentielle.

Exemple 3 (Homogènes d'ordre 1)

1. Résoudre : $y' + ty = 0$.



2. Résoudre : $\frac{dq}{dt} = 3q$.



3. Résoudre : $y' = \frac{t}{t^2-1}y$.



4. Résoudre : $(1 + t^2)y' + 4ty = 0$.



5. Résoudre : $y' = ixy$.



Exemple 4 (Cas constant général – retour au lycée) Soit $a \in \mathbb{K}$. Résoudre :

$$y' = ay.$$



Exercice 1 Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $y' + y \tan(x) = 0$.

Exercice 2 Déterminer les solutions réelles de $y' = y$ sur $\mathbb{R}$, tracer les graphes des solutions, trouver l'unique solution telle que $y(0) = 2$.

2.2 Résolution de l'équation complète

On applique simplement le théorème déjà démontré dans les généralités : toute solution est obtenue en sommant les solutions de l'homogène et une solution particulière.

Théorème 3 | Résolution de l'équation complète

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $\mathbb{K}$ de (E_1) est :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in I \mapsto \lambda e^{A(t)} + y_p(t) \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}, \quad \text{où } \begin{cases} A : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une primitive de } a \\ y_p \text{ est une solution de } (E_1). \end{cases}$$

Pour résoudre complètement l'équation différentielle (E_1) , il reste donc à déterminer une solution particulière y_p de (E_1) .

CAS DE COEFFICIENTS a, b CONSTANTS. Lorsque second membre et coefficients sont constants, on peut rechercher une solution particulière simplement sous forme d'une constante; c'est ce cas qui arrive le plus souvent en Physique-Chimie notamment. Voyons plusieurs exemples.

Exemple 5

- Résoudre : $y' = -3y - 1$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



- Résoudre : $\tau \frac{dv}{dt} + v = E$ où E, τ sont deux réels fixés tels que $\tau \neq 0$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



Exemple 6 Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$. Résoudre : $y' + ky = 2$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



Exemple 7 (Cas constant – retour au lycée) Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$. Résoudre :

$$y' = ay + b.$$

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



On retrouve alors ici une formule qui vous aviez peut-être déjà vue au lycée :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{at} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Cette formule n'est plus à apprendre par coeur, mais à retrouver à chaque fois via l'homogène puis recherche d'une solution particulière.

FORME DE SOLUTION PARTICULIÈRE SUGGÉRÉE PAR L'ÉNONCÉ. Parfois l'énoncé (*alors sympathique*) vous donnera aussi directement une forme sous laquelle chercher une solution particulière.

Exemple 8 Résoudre : $y' + y = e^{-\frac{t}{2}+2}$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto \alpha e^{at+b}$ où α, a et b seront des réels.



CAS GÉNÉRAL : VARIATION DE LA CONSTANCE. Il s'agit de chercher une solution particulière de la forme des solutions de (H_1) , où la *constante* λ est remplacée par une **fonction** dérivable $t \in I \mapsto \lambda(t)$. Nous faisons donc *varier* la constante λ au sens propre du terme. Et ce procédé de recherche de solution particulière a le bon goût de fonctionner pour n'importe quelles fonctions continues a, b .

Méthode (AN) 3.1 (Variation de la constante) Chercher y_p sous la forme $t \in I \mapsto \lambda(t)e^{A(t)}$, où la fonction $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable et est à déterminer.

Justifions tout d'abord que cette méthode fonctionne toujours.

Preuve Si l'on pose $y_p(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$, pour tout $t \in I$, où λ est une fonction dérivable sur I , alors :



$$\begin{aligned} y_p \text{ solution de } (E_1) &\iff y'_p = ay_p + b \iff (\lambda e^A)' = a\lambda e^A + b \\ &\iff \lambda' e^A + \lambda A' e^A = a\lambda e^A + b \\ &\iff \lambda' e^A + \lambda a e^A = a\lambda e^A + b \\ &\iff \lambda' e^A = b \iff \lambda' = be^{-A} \\ &\iff \lambda \text{ est une primitive de } be^{-A} \text{ sur } I. \end{aligned}$$

Puisque be^{-A} est continue, une telle primitive existe. Une fois λ déterminée (à une constante additive près!), une solution particulière est donnée par : $\forall t \in I, y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$.



Attention

N'utilisez cette méthode que lorsque les deux cas précédents (cas constant ou forme suggérée l'énoncé) ne s'appliquent pas! Elle est bien plus longue à mettre en oeuvre.

Exemple 9 Résoudre : $y' + 3x^2y = e^{x-x^3}$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



Exemple 10 Résoudre : $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.





Exemple 11 Résoudre : $y' + \frac{1}{x+i}y = \frac{e^{-i \arctan(x)}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



Exercice 3 (Un peu de Physique et des complexes) On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{1}{\tau}y = E(t) \quad (E_{\mathbb{R}}) \quad \text{où :}$$

$\tau > 0$ est une constante homogène à un temps, appelé constante de temps du circuit et où E est le signal d'entrée, c'est-à-dire une fonction continue de la

forme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, E(t) = E_0 \sin(\omega t), E_0, \omega \in \mathbb{R}.$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. En considérant : $y' + \frac{1}{t}y = E_0 e^{i\omega t} \quad (E_{\mathbb{C}}),$ en déduire une seconde méthode pour résoudre $(E_{\mathbb{R}}).$

CONDITION INITIALE. Nous savons donc à présent résoudre complètement une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Lorsque l'on ajoute en plus une *condition initiale*, alors il existe une unique solution.

Théorème 4 | Résolution avec condition initiale

Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une et une seule solution au « problème de CAUCHY » :

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

En résumé, sans condition initiale on a une infinité de solutions. Avec une condition initiale il y a unicité.

Preuve

- Commençons par chercher une expression de y , soit A une primitive de a .
 - ◊ On sait déjà que toute solution y_H de l'homogène est de la forme $y_H : t \in I \mapsto \lambda e^{A(t)}$.
 - ◊ On sait aussi d'après la méthode de variation de la constante qu'une solution particulière est de la forme $y_p : t \in I \mapsto \lambda(t)e^{A(t)}$ où λ est dérivable et vérifie $\lambda' = be^{-A}$. La fonction λ définie par $\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} du$ convient. (*unique primitive de be^{-A} s'annulant en t_0*)
 - ◊ Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall t \in I, y(t) = \lambda e^{A(t)} + \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} du \times e^{A(t)}.$$
 Or, $y(t_0) = \lambda e^{A(t_0)} + 0 = y_0$ par hypothèse, donc : $\lambda = e^{-A(t_0)}y_0 + 0$.
 - ◊ On déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, y(t) &= e^{-A(t_0)}e^{A(t)} + \int_{t_0}^t b(u)e^{-A(u)} du \times e^{A(t)} \\ &= e^{A(t)-A(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(u)}b(u) du. \end{aligned}$$
- Il reste tout de même à vérifier que l'expression précédente ne dépend pas du choix d'une primitive, ce qui garantira l'unicité. En effet, si $B = A + c$ est une autre primitive, avec $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, e^{B(t)-B(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{B(t)-B(u)}b(u) du \\ = e^{A(t)+c-A(t_0)-c}y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t)+c-A(u)-c}b(u) du \\ = e^{A(t)-A(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(u)}b(u) du. \end{aligned}$$

Exemple 12 Résoudre : $y' - 3y = 5, y(0) = 2.$

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



Exemple 13 On reprend l'Exemple 6, déterminer l'unique solution vérifiant :

- $y(0) = 0$



- $y(0) = -1$



- $y(1) = 1$



PRINCIPE DE SUPERPOSITION. Ce principe s'applique aux équations différentielles lorsque le second membre s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire.

Proposition 1 | Principe de superposition pour l'ordre 1

Soient $a, b_1, b_2 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, et y_1, y_2 dérivables solutions de :

$$y_1' = a(t)y_1 + b_1(t), \quad y_2' = a(t)y_2 + b_2(t).$$

Alors $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de : $y' = a(t)y + [\lambda b_1(t) + \mu b_2(t)]$.

Note | Le principe s'étend sans difficulté à plus de deux fonctions

Le principe de superposition est donc utile lorsque le second membre fait apparaître une combinaison linéaire de seconds membres plus simples. Ce principe est cependant assez peu utile pour l'ordre 1, puisque l'on dispose de la méthode de variation de la constante.

Preuve



Exemple 14 Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - 2y = 3e^t + e^{2t}$.

- On commence par chercher une solution particulière de $y' - 2y = e^t$. On trouve par variation de la constante : $\forall t \in \mathbb{R}, y_1(t) = -e^t$.
- Ensuite on cherche une solution particulière de $y' - 2y = e^{2t}$. On trouve par variation de la constante : $\forall t \in \mathbb{R}, y_2(t) = te^{2t}$.
- Par superposition : $y_p : t \mapsto te^{2t} - 3e^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle de départ.

3 LINÉAIRES DU 2nd ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Définition 6 | Définition pour $n = 2$

- On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre sur I à coefficients constants* toute équation de la forme (E_2) c'est-à-dire une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(t) \quad (E_2)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$, et $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Note

Comme $a \neq 0$, (E_2) est bien de la forme de la Définition 3 après division par a .

- L'équation homogène associée ou encore *équation sans second membre associée à (E_2)* est l'équation suivante :

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (H_2)$$

Définition 7 | Équation caractéristique

On introduit également l'*équation caractéristique* de (E_2) :

$$ar^2 + br + c = 0, \quad \text{d'inconnue } r \in \mathbb{C}. \quad (EC)$$

Exemple 15

- $2y'' = 3y$ est homogène d'inconnue $y : t \mapsto y(t)$. Son équation caractéristique est :



- $2y'' + y' - 3y = e^t$ n'est pas homogène, d'homogène $2y'' + y' - 3y = 0$, d'inconnue $y : t \mapsto y(t)$. Son équation caractéristique est :



- Pour E, τ deux réels, $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$ d'inconnue $u_c : t \mapsto u_c(t)$ est à coefficients constants et homogène.

◇ La fonction $u_c : t \mapsto (t + 1)e^{-\omega_0 t}$ est une solution de cette équation car :



- ◇ Son équation caractéristique est :



◇



Cadre

Dans la suite de cette sous-section, on se fixe une équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$, avec $d : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue, et $a, b, c \in \mathbb{K}$.

3.1 Résolution de l'équation homogène

Nous savons là encore déterminer facilement l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Nous admettons le résultat.

Théorème 5 | Solutions complexes de l'équation homogène

Soit une équation différentielle de la forme (H_2) et (EC) son équation caractéristique. On suppose que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On note Δ le discriminant de (EC) .

- Si $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire si (EC) possède deux racines distinctes $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$, alors :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}.$$
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si (EC) possède une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto e^{\alpha t}(At + B) \mid (A, B) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Preuve Essayons d'imiter la preuve de l'ordre 1 : il s'agit de nouveau d'introduire une fonction annexe (g ci-dessous) qui vérifie un problème que l'on sait résoudre (pour l'ordre 1, il s'agissait d'un problème de primitivation).

● [Recherche d'une ED vérifiée par une fonction auxiliaire]

- ◇ Si y est deux fois dérivable, calculons tout d'abord y', y'' où :

$$\forall t \in I, \quad g(t) = e^{-\alpha t} y(t) \iff y(t) = e^{\alpha t} g(t).$$



Ainsi, y est solution de (H_2) si, et seulement si, g vérifie :

$$ag'' + (2a\alpha + b)g' + \underbrace{(a\alpha^2 + b\alpha + c)}_0 g = ag'' + (2a\alpha + b)g' = 0.$$

En divisant par $a \neq 0$ on déduit avec la relation coefficients/racines

$$\frac{b}{a} = -(\alpha + \beta) \quad \text{que :} \quad g'' + (\alpha - \beta)g' = 0.$$

- [Résolution de l'EDL₁ en g'] Voilà désormais un objet bien connu : une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en g' que l'on peut résoudre puis conclure.



Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on voit le résultat précédent ne donne pas un ensemble de solutions formé de fonctions à valeurs réelles, puisque α, β sont *a posteriori* complexes

(contrairement au résultat analogue pour l'ordre 1). On a donc un second énoncé dédié aux solutions réelles, que l'on obtient par le lemme qui suit.

Exemple 16

1. Résoudre : $y'' + 3i y' + (i - 3)y = 0$.



2. Résoudre : $y'' + 2i y - y = 0$.



3. Résoudre : $y'' + y = 0$.



Note

On a ici un ensemble de solutions complexes, mais comme tous les coefficients sont réels il semble plus naturel de chercher un sous-ensemble formé de solutions réelles. On constate qu'en prenant $A = B = 1$, on obtient que $t \mapsto 2 \cos(t)$ est une solution réelle! C'est l'objectif du prochain résultat : toutes les trouver.

Lemme 1 | Lien entre solutions réelles et complexes

Supposons que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Alors les solutions réelles de (H_2) sont les parties réelles des solutions complexes de (H_2) .

Preuve Il s'agit d'une égalité de deux ensembles (de fonctions), que l'on montre par double inclusion.

- Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution réelle de (H_2) . Alors on peut considérer a fortiori que y est une solution à valeurs complexes. Ainsi, $y = \operatorname{Re} y$ est bien la partie réelle d'une solution complexe de (H_2) .

- Réciproquement, soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une solution complexe de (H_2) . Alors $ay'' + by' + cy = 0$, et en passant aux parties réelles dans les deux membres, a, b et c étant réels, on a :

$$a \operatorname{Re}(y'') + b \operatorname{Re}(y') + c \operatorname{Re}(y) = 0$$

Or, par définition de la dérivée d'une fonction à valeurs complexes, on a :

$$\operatorname{Re}(y'') = \operatorname{Re}(y'')', \quad \operatorname{Re}(y') = \operatorname{Re}(y)',$$

donc $\operatorname{Re}(y)$ est bien une solution réelle de (H_2) sur $\mathbb{R}$.

Exemple 17 Considérons $y'' + y = 0$.

- Vérifier que $f : t \mapsto e^{it} + 2e^{-it}$ est une solution complexe.



- En déduire une solution réelle.

**Théorème 6 | Solutions réelles de l'équation homogène**

Soit une équation différentielle de la forme (H_2) et (EC) son équation caractéristique. On suppose que $a \neq 0$. On note Δ le discriminant de (EC) .

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si (EC) possède deux racines réelles distinctes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si (EC) possède une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto e^{\alpha t}(At + B) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$
- Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire (EC) possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_h &= \{t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{t \mapsto e^{\alpha t}C \cos(\beta t + \varphi) \mid (C, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\mathcal{S}_h} \right\} \text{transformation de FRESNEL}$$

Note

Dans la pratique, on utilise plutôt la première forme en Mathématiques

Preuve D'après le lemme, on a :

$$\mathcal{S}_h = \begin{cases} \{t \mapsto \operatorname{Re}(Ce^{\alpha t} + De^{\beta t}) \mid (C, D) \in \mathbb{C}^2\} & \text{si } \Delta \neq 0 \\ \{t \mapsto \operatorname{Re}(e^{\alpha t}(Ct + D)) \mid (C, D) \in \mathbb{C}^2\} & \text{si } \Delta = 0. \end{cases}$$

On discute donc les solutions dans chaque cas.

- [Cas $\Delta > 0$]



- [Cas $\Delta < 0$]



- [Cas $\Delta = 0$] Ainsi (EC) admet une racine double, qui est forcément réelle car a, b, c sont des réels.



Exemple 18 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y' - 2y = 0$



2. $y'' - 2y' + y = 0$



3. $y'' - y' + y = 0$



Exercice 4 (Oscillateur harmonique) Résoudre : $y'' - \omega^2 y = 0$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ (où ω est un réel non nul).

3.2 Résolution de l'équation complète

On applique encore une fois le théorème déjà démontré sur le sujet : toute solution est obtenue en sommant les solutions de l'homogène et une solution particulière.

Théorème 7 | Résolution de l'équation complète

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) est :

$$\mathcal{S} = \{y + y_p \mid y \in \mathcal{S}_h\} \text{ où } y_p \text{ est une solution de } (E_2).$$

Pour résoudre complètement l'équation différentielle (E_2) , il reste donc à déterminer une solution particulière y_p de (E_2) .

Même si la méthode de variation de la constante trouve une généralisation pour l'ordre 2 appelée « variation des constantes », le programme de PCS11 est limitatif :

« Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ et $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$. »

DÉTERMINATION DE y_p : CAS DE SECONDS MEMBRES « POLYNÔMES × EXPONENTIELS ». Le résultat qui suit unifie les seconds membres exponentiels et polynomiaux.

Théorème 8 | Solution particulière pour $d(t) = P(t)e^{mt}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $m \in \mathbb{K}$

On suppose que le second membre de (E_2) est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d(t) = P_n(t)e^{mt},$$

où P_n est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré n , et $m \in \mathbb{K}$.

Alors :

- si m n'est pas racine de (EC) il existe une solution particulière de (E_2) d'expression :

$$\forall t \in I, \quad y_p(t) = Q_n(t)e^{mt},$$

où Q_n est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n .

- Si m est racine simple de (EC) il existe une solution particulière de (E_2) d'expression :

$$\forall t \in I, \quad y_p(t) = tQ_n(t)e^{mt},$$

où Q_n est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n .

- **si m est racine double de (EC)** il existe une solution particulière de (E_2) d'expression :

$$\forall t \in I, \quad y_p(t) = t^2 Q_n(t) e^{mt},$$

où Q_n est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n .

Preuve Admis.

Exemple 19 Déterminer une solution particulière réelle des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :

1. $y'' - y = x e^{-x}.$



2. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + x + 1.$



Corollaire 1 | Cas de coefficients et second membre constants

On suppose que le second membre de (E_2) est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d(t) = d \in \mathbb{K}, \quad \text{c'est-à-dire constant.}$$

Alors :

- **si $c \neq 0$** (c'est-à-dire 0 pas solution de (EC)) il existe une solution particulière de (E_2) constante dans $\mathbb{K}$.

Note | Ce cas de figure représente l'immense majorité des cas!

- **Si $c = 0, b \neq 0$** (c'est-à-dire 0 racine simple de (EC)) il existe une solution particulière de (E_2) d'expression :

$$\forall t \in I, \quad y_p(t) = At, \quad \text{où } A \in \mathbb{K}.$$

Note | Ce cas de figure se présente rarement, car on peut alors se ramener à une EDL₁ en y' ...

- **si $c = b = 0$** (c'est-à-dire 0 racine double de (EC)) il existe une solution particulière de (E_2) d'expression :

$$\forall t \in I, \quad y_p(t) = At^2, \quad \text{où } A \in \mathbb{K}.$$

Note | Ce cas de figure se présente rarement, car on peut résoudre en primitivant deux fois...

Preuve Il s'agit d'appliquer le **Théorème 8** avec $n = 0$, $P_n = d$ et $m = 0$, et le résultat s'en suit. Constatons simplement que :

- m est racine de (EC) si, et seulement si, : $a0^2 + b0 + c = 0$, donc si, et seulement si, $c = 0$.
- Si $c = 0$. Alors :

$$m \text{ est racine simple de (EC)} \iff \Delta = b^2 - 4ac = b^2 \neq 0$$

$$\iff b \neq 0.$$
- Et enfin si $b = c = 0$, alors $\Delta = 0$, donc 0 est racine double de (EC).

Exemple 20 Déterminer une solution particulière réelle des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :

1. $y'' - 2y' = 1$.



2. $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = E$ où : $\omega_0 \in \mathbb{R}$, et $E \in \mathbb{R}$ tel que : $E \neq -\omega_0$.



Exercice 5 On considère : $m \frac{d^2 y}{dt^2} + K \frac{dy}{dt} + ky = -mg$, où $m, k, K, g > 0$ sont trois constantes réelles.

1. Déterminer une solution particulière y_0 constante. On l'appelle la *position d'équilibre*.

2. 2.1) On suppose que $K^2 - 4mk > 0$. Montrer que les solutions de l'équation sont de la forme :

$$y(t) = -\frac{mg}{k} + Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_-^*)^2 \text{ et } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Interpréter la limite d'une solution en fonction de l'hypothèse.

2.2) Même question lorsque $K^2 - 4mk < 0$, en montrant que les solutions de l'équation sont de la forme :

$$y(t) = -\frac{mg}{k} + Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec } \lambda > 0, (\omega, \phi) \in \mathbb{R}^2.$$

2.3) Même question lorsque $K^2 - 4mk = 0$, en montrant que les solutions de l'équation sont de la forme :

$$y(t) = -\frac{mg}{k} + (At + B)e^{\alpha t} \quad \text{avec } \alpha < 0, (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

DÉTERMINATION DE y_p : CAS DE SECONDS MEMBRES TRIGONOMÉTRIQUES.

Pour cela, on transite provisoirement par les complexes et on se ramène au résultat précédent!



Exemple 21 Résolvons l'équation différentielle : $y'' + y = \cos(x)$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



CONDITIONS INITIALES. Admettant l'existence d'une solution particulière avec un second membre continu d , on peut démontrer l'existence et l'unicité ci-après.

Théorème 9 | Résolution avec condition initiale

Soient $t_0 \in I$, $(y_0, y'_0) \in \mathbb{K}^2$. Il existe une et une seule solution sur I à valeurs dans

$$\mathbb{K} \text{ au « problème de CAUCHY » : } \begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y'_0. \end{cases}$$

Nous admettons ce résultat d'existence et unicité dans le cas de l'ordre 2.

Exemple 22 Résoudre : $y'' - 2y' - 3y = 9t^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Résolution de l'homogène.



Recherche d'une solution particulière.



Condition initiale.



Exercice 6 Déterminer une solution particulière réelle des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' - 2y = 3e^t + 1$

2. $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$

3. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

4. $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^{2t}$.

PRINCIPE DE SUPERPOSITION. Le principe de superposition s'applique encore pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants admettant un second membre somme de plusieurs fonctions simples.

4

TECHNIQUE DU CHANGEMENT DE FONCTION INCONNUE

- Le cadre de résolution des équations différentielles de ce cours est finalement assez restreint; les coefficients doivent être constants pour l'ordre 2, et de manière générale les équations différentielles doivent être linéaires.
- Il est cependant parfois possible de s'y ramener à l'aide d'un « changement de fonction inconnue ».

Exemple 23 (Non linéaire à linéaire) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = y \ln y \quad (E).$$

Cela revient donc à trouver l'ensemble des fonctions y , dérivables à valeurs strictement positives, telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = y(t) \ln y(t).$$

Indication : On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $y(t) = e^{z(t)}$ pour tout t .





Résumé

$\Rightarrow$ Soit y une solution de (E). Alors posons $z = \ln \circ y$. On a vérifié que z est solution d'une équation différentielle (E') que l'on sait résoudre.

$\Leftarrow$ Soit z une solution de (E'), alors $y = \exp \circ z$ est une solution de (E). En d'autres termes, il y a une correspondance bijective entre les solutions de (E) et (E') — il suffit donc de résoudre l'une ou l'autre pour toutes les avoir.

Exemple 24 (Non constants à constants) Résoudre :

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0 \quad \text{sur} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Indication : On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\tan x)$ pour tout x



Méthode (AN) 3.2 (Résolution par changement de fonction inconnue) Soit (E) une équation différentielle en une fonction y que l'on ne sait pas résoudre *a priori*.

1. Soit une fonction z dépendant de y donnée par l'exercice (généralement « de la forme $z(t) = y \circ \varphi(t)$ »).
2. Calculer les dérivées successives $z, z', z'', \dots$ (en fonction de l'ordre de l'équation différentielle en y).
3. Évaluer (E) en $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Combiner 2) et 3) pour trouver une équation différentielle en z .

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section.

Méthode (AN) 3.1 (Variation de la constante) Chercher y_p sous la forme $t \in I \mapsto \lambda(t)e^{A(t)}$, où la fonction $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable et est à déterminer.

Méthode (AN) 3.2 (Résolution par changement de fonction inconnue) Soit (E) une équation différentielle en une fonction y que l'on ne sait pas résoudre *a priori*.

1. Soit une fonction z dépendant de y donnée par l'exercice (généralement « de la forme $z(t) = y \circ \varphi(t)$ »).
2. Calculer les dérivées successives $z, z', z'', \dots$ (en fonction de l'ordre de l'équation différentielle en y).
3. Évaluer (E) en $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Combiner 2) et 3) pour trouver une équation différentielle en z .

5 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

- savoir résoudre l'homogène d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 ☐
- savoir effectuer une variation de la constante pour l'ordre 1 ☐
- savoir trouver une solution particulière pour l'ordre 2 lorsque le second membre est constant ☐
- savoir que lorsqu'aucune condition initiale n'est imposée, on a une infinité de solution, on conclut en donnant un ensemble ☐
- savoir que lorsqu'une condition initiale est imposée, on conclut en donnant une fonction solution ☐

Signalétique du TD

Les exercices possèdent un niveau de difficulté allant de ●○○ à ●●●.

Les exercices labellisés ●●● doivent être travaillés une fois le reste bien compris.

Merci de déposer les exercices rédigés en scannant ce QR code, au plus tard le dimanche 20h pour le TD du mardi, ou le mercredi 20h pour le TD du jeudi.



Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler : 28

5.1 Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1 | ●○○ Déterminer les solutions des problèmes suivants.

1. $y' + 3y = 1$ avec $y(0) = 1$
2. $3y' = -y$ avec $y(0) = 2$
3. $y' = -4y + 8$ avec $y(-\ln(2)) = 18$

4. $y' = 2y + 1$ avec $y'(0) = 4$

Exercice 2 | ●●○ Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$

2. $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$

3. $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

4. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$

5. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$

6. $y' + \frac{2}{x^2-1}y = x$ sur $]1, +\infty[$

7. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$

8. $x^3y' + 4(1 - x^2)y = 0$

9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. *Indication : On pourra chercher une solution particulière affine.*

10. $y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 1$.

11. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\arctan(x)}{x}$.

12. $y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

13. $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$.

Exercice 3 | ●○○ [Benjamin JA – Younès GU] Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de résolution.

1. $y' \cos x - y \sin x = 0$, avec $y(0) = 1$

2. $y' + xy = 2x$, avec $y(0) = 1$

Exercice 4 | ●●○ Montrer que les tangentes aux graphes des solutions d'une équation différentielle linéaire normalisée du premier ordre aux points d'abscisse x_0 sont toutes concourantes ou toutes parallèles.

Exercice 5 | ●●○ [Abderahmene AB – Maxance FA] Déterminer les fonctions dérivables sur un intervalle I dont le graphe $\mathcal{C}$ vérifie la propriété suivante : en tout point M de $\mathcal{C}$, la tangente à $\mathcal{C}$ est orthogonale à la droite (OM).

Exercice 6 | ●○○ Datation au carbone 14 La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'année t , y vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t),$$

où $k = 1.238 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

Exercice 7 | ●●○ Hauteur d'une baignoire On considère une baignoire de forme parallélépipédique dont la base est de dimensions ab que l'on remplit avec un débit constant noté d . On note $z(t)$ la hauteur d'eau dans la baignoire à l'instant t et $V(t)$ son volume. On suppose que $V(0) = 0$.

La baignoire a une fissure au fond qui laisse s'échapper plus ou moins d'eau en fonction de la pression exercée par l'eau sur celle-ci. On rappelle que la pression au fond de la baignoire est égale à $p(z) = \rho g z$. Le débit de la fuite est $d_f = \alpha p$ avec $\alpha > 0$ et p la pression qui s'y exerce. Toutes les grandeurs sont en unité SI.

1. Si on suppose la baignoire suffisamment haute, montrer que le volume d'eau tend vers un volume à l'équilibre V_{eq} que l'on déterminera.
2. Si la baignoire a un volume V (que l'on suppose inférieur au volume d'équilibre), au bout de combien de temps sera-t-elle pleine?

5.2 Équations différentielles du second ordre

Exercice 8 | ●●○ [Gabriel BE – Cyril PA] Déterminer une équation différentielle linéaire homogène du second ordre qui admette pour solution la fonction :

$$f : x \mapsto e^{2x}(\cos(3x) - \sin(3x)).$$

Le vérifier une fois l'équation différentielle trouvée.

Exercice 9 | ●○○ Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$

2. $4y'' - 4y' + y = 4$

3. $y'' - 2y' + 5y = 5$

4. $y'' - 2y' = 2$.

Exercice 10 | ●●○ **Recherche de solution particulière** Déterminer une solution particulière des équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y' + y = t^2 + 6$
2. $y'' + 4y = -e^{2t}$
3. $y'' + y = \cos(t) + \sin(t)$
4. $y'' + y' - 2y = 2e^t$.

Exercice 11 | ●●○ Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
3. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

5.3 Équations fonctionnelles

Exercice 12 | ●●○ [Oscar CO – Antoine DE] Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

Exercice 13 | ●●○ Trouver les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y).$$

Exercice 14 | ●●○ [Emma RI – Raphaël LU] Trouver les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)(2x - 3t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

On pourra rechercher une équation différentielle vérifiée par la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Exercice 15 | ●●○ Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des systèmes différentiels suivants

1. $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$

On déterminera une équation différentielle du second ordre dont y est solution. Pour le second système, on distinguera des cas selon la valeur de θ .

COEFFICIENTS NON CONSTANTS POUR L'ORDRE 2

Exercice 16 | ●●○ Résoudre $x^2 y'' + 3xy' + y = 2$ sur $\mathbb{R}^{++}$ en posant $z(t) = y(e^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 | ●●○ Résoudre l'équation différentielle $x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{++}$ en posant $z(x) = x^2 y(x)$.

Exercice 18 | ●●○ [Aurélien IZ – Titouan GO] Résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0.$$

Indication : On pourra effectuer le changement de fonction inconnue donné par le changement de variable $x = \tan t$

NON LINÉAIRE

Exercice 19 | ●●○ Déterminer les solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas des équations différentielles suivantes.

1. $y' = y^2$
2. $y' + e^{x-y} = 0$

Exercice 20 | ●●● On souhaite résoudre sur un intervalle le plus grand possible de $\mathbb{R}^*$ l'équation différentielle *non linéaire* :

$$xy' + \frac{2x^2 - 1}{\tan y} = 0 \quad (\text{E}).$$

- Soit y une solution sur un intervalle I .
 - Que peut-on dire des valeurs prises par y ? Posons $z = \cos \circ y$.
 - Que peut-on dire des valeurs prises par z ?
 - Montrer que z est définie et dérivable sur I , et exprimer z' en fonction de y' et de y .
 - Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre dont z est solution.
 - En déduire la forme de $z(x)$. Préciser une condition, notée $(\star)$, que doivent nécessairement vérifier I et la constante d'intégration C .
 - Déterminer enfin la forme de $y(x)$.
- Réciproquement, montrer que toutes les fonctions y de la forme ci-dessus, I et C étant soumis à la condition $(\star)$, sont bien solutions de (E).

Exercice 21 | ●●○ [Lou-Anne CH – Camille DU] **Propagation d'une rumeur** On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit du pourcentage $y \in [0, 1]$ de ceux qui sont au courant de la rumeur par le pourcentage de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.

- Écrire une équation différentielle vérifiée par y . On admet dans la suite que la seule solution s'annulant quelque part est la solution nulle, on résout donc l'équation différentielle sur l'ensemble des fonctions y ne s'annulant pas.
- En déduire une équation différentielle vérifiée par $z = \frac{1}{y}$.
- Résoudre l'équation vérifiée par z et en déduire y .
- [Application]** Une petite ville compte 1000 habitants. À 8 heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. À midi, la moitié de la ville est au courant. A quel moment de la journée est-ce que 90% de la population sera au courant de cette nouvelle? On arrondira le résultat à 10^{-2} près, on précisera aussi dans quelle unité il est exprimé.

Exercice 22 | ●●● **Modèle de VERHULST continu** On dit qu'une fonction P suit un *modèle de Verhulst de taux* β, μ, κ si P est dérivable en t et vérifie :

$$\forall t \geq 0, \quad P'(t) = (\beta - \mu) \left(P(t) - \frac{P(t)^2}{\kappa} \right), \quad P(0) = P_0. \quad (\text{Verhulst})$$

Dans la suite on note $r = \beta - \mu$. On cherche résoudre l'équation (**Verhulst**) pour $P(0) = P_0 \in]0, \kappa[$.

- [Positivité]** On cherche déjà à prouver que pour tout $t \geq 0$, $P(t) \in]0, \kappa[$. On suppose que P est une solution, et on note $f(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right)$ pour tout $t \geq 0$.
 - Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puis justifier que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus.
 - Montrer que $f(0) \neq 0$ et en déduire que pour tout $t \geq 0$, $f(t) \neq 0$.
 - Montrer que pour tout $t \geq 0$, $P(t) \in]0, \kappa[$.
- [Résolution]**
 - Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \kappa\}, \quad \frac{\kappa}{x(\kappa - x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{\kappa - x}.$$
 - Résoudre (**Verhulst**).

AUTRES ORDRES

Problème 1 | ●●○ **Équation différentielle linéaire d'ordre 3** On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions ci-après :

$$g_1 : x \mapsto e^{-x}, \quad g_2 : x \mapsto e^{-2x} \cos(x), \quad g_3 : x \mapsto e^{-2x} \sin(x).$$

Et on définit l'ensemble des « combinaisons linéaires de g_1, g_2, g_3 » comme étant :

$$\mathcal{E} = \{ \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

On s'intéresse dans ce problème à la résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 suivante :

$$y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0 \quad (\text{H})$$

et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (H).

- Vérifier que g_1 est solution de (H).
 - Vérifier que g_2 est solution de (H). On admet par la suite que g_3 est également solution de (H).
 - Justifier l'inclusion : $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.
- Dans cette question, on souhaite démontrer que : $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Pour cela, on considère une fonction f solution de (H).

2.1) On pose $g = f'' + 4f' + 5f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle : **(H1)** $y' + y = 0$.

2.2) Résoudre l'équation différentielle **(H1)**.

2.3) Résoudre l'équation différentielle : **(H2)** $y'' + 4y' + 5y = 0$.

2.4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle : **(H3)** $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$.
Indication : On cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ à choisir

2.5) Conclure.

3. Déterminer l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. On a :

$$I_0 = \int_1^e x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{e^3}{3} \right],$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \underbrace{x^2}_{:=v'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{:=u(x)} dx \\ &= - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx + \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e \quad \text{intégration par parties, car } \ln x, x \mapsto \frac{x^3}{3} \text{ sont } \mathcal{C}^1 \\ &= -\frac{1}{9} [x^2]_1^e + \frac{e^3}{3} \end{aligned}$$

2. Sur $[1, e]$, on a $\ln(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [1, e]$, donc :

$$\forall x \in [1, e], \quad 0 \leq \ln^{n+1}(x) \leq \ln^n(x) \leq 1.$$

Donc en multipliant par x^2 qui est bien positif, on déduit :

$$\forall x \in [1, e], \quad 0 \leq x^2 \ln^{n+1}(x) \leq x^2 \ln^n(x) \leq 1.$$

Puis en intégrant : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Ainsi la suite (I_n) décroît et est minorée par zéro donc converge.3. Notons $f : x \in [1, e] \mapsto \ln(x) - \frac{x}{e}$. Alors f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \geq 0$ puisque $x \leq e$ sur le domaine considéré. Ainsi, f est décroissante, donc pour tout $x \in [1, e]$, $f(x) \leq f(e) = 0$. Ainsi, f est négative, on a donc bien établi :

$$\boxed{\forall x \in [1, e], \quad 0 \leq \ln(x) \leq \frac{x}{e}}.$$

On intègre alors la relation précédente, après l'avoir élevée à la puissance n (encadrement positif), puis multipliée par x^2 (qui est positif), on obtient :

$$0 \leq I_n \leq \int_1^e \left(\frac{x}{e} \right)^n x^2 dx.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \int_1^e \left(\frac{x}{e} \right)^n x^2 dx &= \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2} dx \\ &= \frac{1}{e^n} \left(\frac{e^{n+3}}{n+3} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{e^3}{n+3} - \frac{e^{-n}}{n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On a donc par théorème d'encadrement, que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.4. Faisons une intégration par parties, comme nous l'avons faite pour I_1 .

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e \underbrace{x^2}_{:=v'(x)} \underbrace{\ln^{n+1}(x)}_{:=u(x)} dx \\ &= - \int_1^e \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} (n+1) \ln^n(x) dx + \left[\frac{x^3}{3} \ln^{n+1}(x) \right]_1^e \quad \text{intégration par parties, car } \ln^{n+1}, x \mapsto \frac{x^3}{3} \text{ sont } \mathcal{C}^1 \\ &= -\frac{n+1}{3} I_n + \frac{e^3}{3}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.}$$

Solution (exercice 2) [Énoncé] Je ne détaille pas tous les calculs.1. **Résolution de l'homogène.** Résolution de l'équation homogène associée : $y' = 2y$. On en déduit : $\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto Ce^{2x} \mid C \in \mathbb{R}\}$ **Recherche d'une solution particulière.** Par variation de la constante, on obtient que : $y^p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$.**Conclusion.** $\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \mid C \in \mathbb{R}\}$ 2. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on a $1+x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, il est équivalent de résoudre $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$.**Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \mapsto a(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2 > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif et ainsi on a toujours $1+x^2 \neq 0$. Donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -\ln|1+x^2| = -\ln(1+x^2)$. On a de plus $e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$. Donc : $\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \frac{C}{1+x^2} \mid C \in \mathbb{R}\}$.**Recherche d'une solution particulière.** On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y^p(x) = \frac{C(x)}{1+x^2}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y^p est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$, on obtient :

$$(y^p)'(x) + \frac{2x}{1+x^2} y^p(x) = \frac{1}{1+x^2} \iff \frac{C'(x)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \iff C'(x) = 1,$$

ainsi on peut prendre $C(x) = x$, et donc $y^p(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Conclusion. $\mathcal{S} = \{x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2} \mid C \in \mathbb{R}\}$

3. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on la résout sur $\mathbb{R}^{++}$, on a : $x^2 \neq 0$ et ainsi il est équivalent de résoudre :

$$y' = \frac{y}{x^2} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Résolution de l'homogène. La fonction $a : x \mapsto a(x) = \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{++}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}^{++}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$, $A(x) = \frac{1}{x}$. On a donc : $\mathcal{S}_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \mapsto Ce^{-\frac{1}{x}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

Recherche d'une solution particulière. En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_1(x) = C(x)e^{-\frac{1}{x}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$. Ainsi y_1 est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$, on obtient :

$$(y^p)'(x) - \frac{y^p(x)}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \iff C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

en simplifiant par $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$. Ainsi pour tout $x > 0$: $C(x) = -\frac{1}{x}$. Ainsi : $y^p(x) = -\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ est une solution particulière.

Conclusion. La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \left(C - \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

4. $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{x^2} + e^x \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

5. $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-\frac{1}{12}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin x} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

6. $\mathcal{S} = \left\{ x \in]1, +\infty[\mapsto \left(C + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln(x+1)\right)\frac{x+1}{x-1} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

7. **Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \mapsto a(x) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = x$. La solution générale de l'équation homogène associé est alors : $x \mapsto Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Recherche d'une solution particulière. À l'aide de la méthode de variation de la constante et d'intégrations par parties, on trouve une solution particulière $x \mapsto \frac{x^3}{3}e^x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x$.

Conclusion. $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^x + \frac{x^3}{3}e^x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

8. $\mathcal{S} = \left\{ x \in]0, +\infty[\mapsto Cx^4e^{\frac{2}{x^2}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

9. $\mathcal{S} = \left\{ x \in]0, +\infty[\mapsto Ce^{-\frac{1}{x}} + x - 1 \mid C \in \mathbb{R} \right\}$

10.
11.
12.
13.

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. On résout sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, un intervalle contenant 0 sur lequel la fonction cosinus ne s'annule pas. Il est alors équivalent de résoudre :

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x}y = 0.$$

On obtient puisque l'équation différentielle est déjà homogène :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{C}{\cos x} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Condition initiale. On a $y(0) = 1 = \frac{C}{\cos 0}$, donc on a $C = 1$. On en déduit que l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ est $y : x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{1}{\cos x}$.

2. **Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \mapsto a(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \frac{x^2}{2}$. On a donc : $\mathcal{S}_0 = \left\{ x \mapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

Recherche d'une solution particulière. En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y^p(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y^p est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient : $(y^p)'(x) + xy^p(x) = 2x \iff C'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}}$, et $y^p(x) = 2$ est une solution particulière.

Conclusion. $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2 \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.

Condition initiale. Comme $y(0) = 1$, on a : $y(0) = Ce^0 + 2 = C + 2 = 1 \iff C = -1$. Ainsi il existe une unique solution qui est : $y : x \mapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. On doit résoudre l'équation différentielle $y' + ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \{ y : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto Ce^{-kt} \mid C \in \mathbb{R} \}.$$

De plus, on a $y(0) = N_0$, donc $Ce^{-k \times 0} = N_0$, soit $C = N_0$. On en déduit que y

a pour expression $y : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto N_0 e^{-kt}$.

2. On cherche $t_{0.5}$ tel que :

$$y(t_{0.5}) = \frac{1}{2}N_0 \iff N_0 e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2}N_0 \iff e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2} \iff -kt_{0.5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $t_{0.5} = \frac{\ln 2}{k}$. L'application numérique donne $t_{0.5} \simeq 5599$ ans.

3. On cherche t_1 tel que :

$$y(t_1) = 0.7N_0 \iff N_0 e^{-kt_1} = 0.7N_0 \iff e^{-kt_1} = 0.7 \iff -kt_1 = \ln(0.7)$$

a par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $t_1 = -\frac{\ln 0.7}{k}$. L'application numérique donne comme estimation $t_1 \simeq 2881$ ans pour ces fragments.

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1. On rappelle qu'un débit est homogène à un volume sur un temps. Pour mettre en équation le problème, on fait un bilan de volume d'eau entre deux temps très proches. Soient $t \in \mathbb{R}^+$, $h \in \mathbb{R}^+$. D'après l'énoncé, on a :

$V(t+h) = V(t) + \text{volume d'eau ajouté} - \text{volume sortant}$

$$= V(t) + d \times h - d_f h$$

$$= V(t) + d \times h - \alpha p g z(t) h$$

$$= V(t) + d \times h - \frac{\alpha p g}{ab} V(t) h. \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} V(t) = ab z(t)$$

En passant $V(t)$ à gauche, puis en divisant par h et en faisant $h \rightarrow 0$, on trouve finalement que V est solution de :

$$y' = -\frac{\alpha p g}{ab} y + d.$$

Dans la suite on notera : $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha p g}{ab}$. Le second membre est ici constant, on peut donc chercher une solution particulière sous forme d'une constante, τd convient. On déduit alors que V est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad V(t) = K e^{-t/\tau} + (\tau d),$$

avec $K \in \mathbb{R}$. Or, $V(0) = 0$ donc $K + \tau d = 0$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad V(t) = \tau d (1 - e^{-t/\tau}).$$

Ainsi, par règle usuelle sur les limites, on déduit que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \tau d = V_{eq}$.

2. Si la baignoire a un volume V (que l'on suppose inférieur au volume d'équilibre), on doit résoudre en t : $V(t) = V$, c'est-à-dire :

$$\tau d (1 - e^{-t/\tau}) = V \iff e^{-t/\tau} = 1 - \frac{V}{\tau d} \iff t = -\tau \ln \left(1 - \frac{V}{\tau d} \right).$$

Solution (exercice 9) [Énoncé] Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. **Résolution de l'homogène.** On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 + 8r + 15 = 0$. Ses solutions sont réelles distinctes, données par $r_1 = -5$ et $r_2 = -3$. Les solutions sont donc données par $\mathcal{S}_0 = \{y : t \in \mathbb{R} \mapsto A e^{-5t} + B e^{-3t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Recherche d'une solution particulière. $y^p(t) = \alpha$. On a alors $(y^p)'(t) = (y^p)''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 15\alpha = 5$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{y : t \mapsto A e^{-5t} + B e^{-3t} + \frac{1}{3} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A + B + \frac{1}{3} = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $q'(t) = -5A e^{-5t} - 3B e^{-3t}$, donc $q'(0) = -5A - 3B = 1$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + B = -\frac{1}{3} \\ -5A - 3B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

La solution est donc donnée par $y : t \mapsto \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$.

2. **Résolution de l'homogène.** On étudie l'équation caractéristique associée : $4r^2 - 4r + 1 = 0$. Cette équation admet une solution double, donnée par $r = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc données par $\mathcal{S}_0 = \{y : t \in \mathbb{R} \mapsto (A + Bt)e^{\frac{t}{2}} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Recherche d'une solution particulière. $y^p(t) = \alpha$. On a alors $(y^p)'(t) = (y^p)''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \alpha = 4$, soit $\alpha = 4$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{y : t \in \mathbb{R} \mapsto (A + Bt)e^{\frac{t}{2}} + 4 \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = \frac{A}{2}e^{\frac{t}{2}} + B e^{\frac{t}{2}} + \frac{B}{2}te^{\frac{t}{2}}$, donc $y'(0) = \frac{A+B}{2} = 1$, soit $B = 2$. La solution est donc donnée par $y : t \in \mathbb{R} \mapsto 2te^{\frac{t}{2}} + 4$.

3. On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

Résolution de l'homogène. On étudie l'équation caractéristique associée : $r^2 - 2r + 5 = 0$. Ses solutions sont complexes conjugués, données par $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$. Les solutions sont donc données par $\mathcal{S}_0 = \{y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t (A \cos(2t) + B \sin(2t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Recherche d'une solution particulière. $y^p(t) = \alpha$. On a alors $(y^p)'(t) = (y^p)''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 5\alpha = 5$, soit $\alpha = 1$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow e^t (A \cos(2t) + B \sin(2t)) + 1 \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A + 1 = 0$, donc $A = -1$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = e^t (A \cos(2t) + B \sin(2t)) + e^t (-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t))$, donc $y'(0) = A + 2B = 1$. On en déduit $B = \frac{1-A}{2} = 1$. La solution est donc donnée par $y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow e^t (-\cos(2t) + \sin(2t)) + 1$.

- On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Cependant, ici le coefficient du terme y est nul : on se ramène à une équation du premier ordre, en $z = y'$. On commence donc par résoudre l'équation $z' - 2z = 2$. La solution de l'équation homogène associée sont de la forme $z_h(t) = Ce^{2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière constante : $z_p(t) = \alpha$. On obtient $\alpha = -1$. Les solutions générales sont donc de la forme $z(t) = Ce^{2t} - 1$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Revenons à présent à y : on a $y' = z$, donc y est une primitive de z . On en déduit que y s'écrit sous la forme : $\mathcal{S} = \{y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{C}{2}e^{2t} - t + K \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$. On utilise les conditions initiales pour déterminer C et K : on a $y(0) = 0$, soit $\frac{C}{2} + K = 0$. De plus, on a $y'(t) = Ce^{2t} - 1$, donc $y'(0) = 1$ donne $C - 1 = 1$, soit $C = 2$. En revenant à l'équation $\frac{C}{2} + K = 0$, on obtient alors $K = -1$. On a donc finalement $y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{2t} - t - 1$.

Solution (exercice 10) [Énoncé] Je ne donne pas tous les détails.

- $y_p(t) = t^2 + 2t + 6$.
- $y_p(t) = -\frac{1}{8}e^{2t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
- $y_p(t) = t(-\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t))$.
- $y_p(t) = \frac{2}{3}te^t$.

Solution (exercice 11) [Énoncé]

- Résolution de l'homogène.** L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4 < 0$. L'équation caractéristique a donc deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 2 + i$ et $r_2 = 2 - i$. Ainsi $\mathcal{S}_0 = \{x \longrightarrow e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Recherche d'une solution particulière. En remplaçant par une constante K dans l'équation, on obtient : $K = \frac{1}{5}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y^p(x) = \frac{1}{5}$.

Conclusion. $\mathcal{S} = \{x \longrightarrow e^{2x}(A \cos(x) + B \sin(x)) + \frac{1}{5} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Or on sait que $y(0) = A + \frac{1}{2}$, et

d'autre part, on a $y'(x) = e^{2x}(2A \cos(x) + 2B \sin(x) - A \sin x + B \cos x) + \frac{1}{2}e^x$. On en déduit que $y'(0) = 2A + B + \frac{1}{2}$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} A + \frac{1}{2} = 1 \\ 2A + B + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales données est $y : x \longrightarrow \frac{e^{2x}}{2}(\cos(x) - 3 \sin(x)) + \frac{1}{2}e^x$.

2.

Solution (exercice 15) [Énoncé] Dans les deux cas, les équations différentielles sont couplées, car elles contiennent toutes les deux des termes en x et en y . Il s'agit de trouver une équation qui ne porte que sur l'une des fonctions. On peut déjà justifier que x, y sont à chaque fois deux fois dérivables car x', y' sont alors des combinaisons linéaires de fonctions dérivables.

- Analyse.** Soit (x, y) une solution. On dérive la première équation, et on obtient $x'' = 4x' - 3y'$. Or on sait que $y' = 2x - y$. On a donc $x'' = 4x' - 6x + 3y$. Enfin, d'après la première équation, on a $3y = 4x - x'$, donc finalement x vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants suivante :

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Son équation caractéristique est donnée par $r^2 - 3r + 2 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1$, elle possède deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. On a donc $x(t) = Ae^t + Be^{2t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit y grâce à la première équation : $y = \frac{4x - x'}{3}$, soit $y(t) = Ae^t + \frac{2}{3}e^{2t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse. On vérifie facilement que les fonctions x et y trouvés sont bien solutions du système différentiel.

- On applique la même méthode.

Analyse. On dérive la première équation, et on obtient $x'' = x' \cos \theta - y' \sin \theta$. Or on sait que $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$. On a donc $x'' = x' \cos \theta - x \sin^2 \theta - y \sin \theta \cos \theta$. Enfin, d'après la première équation, on a $y \sin \theta = x \cos \theta - x'$, donc on a : $x'' = x' \cos \theta - x \sin^2 \theta - x \cos^2 \theta + x' \cos \theta$. Finalement x vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants suivante :

$$x'' - 2x' \cos \theta + x = 0.$$

Son équation caractéristique est donnée par $r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta$. On fait plusieurs cas :

- Cas 1 : si $\theta \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a $\Delta = 0$, et les deux équations du départ

se simplifient en :

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

On en déduit que $x(t) = Ae^t$ et $y(t) = Be^t$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- Cas 2 : si $\theta \in \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a $\Delta = 0$, et les deux équations du départ se simplifient en :

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

On en déduit que $x(t) = Ae^{-t}$ et $y(t) = Be^{-t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- Cas 3 : si $\theta \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a alors $\Delta < 0$, et l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r = \cos \theta \pm i \sin \theta$, de partie réelle $\cos \theta$, et de partie imaginaire $\sin \theta$. On a donc $x(t) = e^{(\cos \theta)t} (A \cos((\sin \theta)t) + B \sin((\sin \theta)t))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit y avec la première équation : $y(t) = \frac{x(t) \cos \theta - x'(t)}{\sin \theta}$, car $\sin \theta \neq 0$. On a donc $y(t) = e^{(\cos \theta)t} (A \sin((\sin \theta)t) - B \cos((\sin \theta)t))$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse. On vérifie facilement que les fonctions x et y trouvés sont bien solutions du système différentiel.

Solution (exercice 16) [Énoncé]

- **[Recherche d'une équation différentielle en z]** On commence par calculer les dérivées de z . Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z'(t) = e^t y'(e^t),$$

$$\begin{aligned} z''(t) &= e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) \\ &= z'(t) + (e^t)^2 y''(e^t). \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a en utilisant l'équation différentielle de départ :

$$(e^t)^2 y''(e^t) = -3e^t y'(e^t) - y(e^t) - 2,$$

donc :

$$(e^t)^2 y''(e^t) = -3z'(t) - z(t) - 2.$$

Donc z vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) = z'(t) - 3z'(t) - z(t) - 2,$$

donc : $z'' + 2z' + z = 2$.

- **[Résolution en z]** C'est cette fois-ci une équation différentielle linéaire à coefficients constants, l'équation caractéristique est $x^2 + 2x + 1 = 0$, et une solution particulière peut être cherchée sous la forme $y_p = K$ avec $K \in \mathbb{R}$. En

remplaçant, on trouve $K = 2$. Donc :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (At + B)e^{-t} + 2.$$

- **[Solutions y]** Constatons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t) \iff \forall x > 0, \quad y(x) = z(\ln x).$$

Donc :

$$\forall x > 0, \quad y(x) = \frac{A \ln x + B}{x} + 2.$$

Solution (exercice 17) [Énoncé]

On calcule les dérivées successives de z . On a $z'(x) = 2xy(x) + x^2 y'(x)$, et

$$z''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2 y''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x).$$

On en déduit que l'on a :

$$z'' - z = x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

Donc z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Résolution de l'homogène. $z'' - z = 0$. On résout l'équation caractéristique associée : $r^2 - 1 = 0$. On a deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par $z_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière. Le second membre est une constante, on cherche donc une solution sous la forme $z_p(t) = \alpha$. En remplaçant dans l'équation, on obtient $\alpha = -1$.

Conclusion. La solution générale de l'équation en z est donc $z(x) = Ae^x + Be^{-x} - 1$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On revient à y : on a $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$, soit $y(x) = \frac{Ae^x + Be^{-x} - 1}{x^2}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Solution (exercice 18) [Énoncé]

L'EDL2 n'est pas à coefficients constants, on ne peut donc appliquer les méthodes classiques. Posons alors comme indiqué $z(t) = y(\tan t)$ et formons une nouvelle équations différentielle en la fonction z – on espère bien sûr que celle-ci sera à coefficients constants. y n'est *a priori* seulement définie sur $] -1, 1[$, on ne considère que des t dans $] -\pi/4, \pi/4[$ et on calcule :

$$z(t) = y(\tan t),$$

$$z'(t) = (1 + \tan^2 t) y'(\tan t),$$

$$z''(t) = 2 \tan t (1 + \tan^2 t) y'(\tan t) + (1 + \tan^2 t)^2 y''(\tan t)$$

$$= 2 \tan t \times z'(t) - 2 \tan t (1 + \tan^2 t) y'(\tan t) - 4y(\tan t).$$

Finalement, on obtient comme nouvelle équation différentielle :

$$z'' + 4z = 0, \text{ sur }]-\pi/4, \pi/4[.$$

Elle se résout très facilement : $z(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$ avec A, B deux constantes réelles. On revient ensuite à la variable x :

$$y(x) = A \cos(2 \arctan x) + B \sin(2 \arctan x), \quad x \in]-1, 1[.$$

Solution (exercice 21) [Énoncé]

- La vitesse de propagation étant la dérivée, nous avons d'après l'énoncé pour une certaine constante $k \in \mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = ky(t)(1 - y(t)).$$

- Par quotient, z est dérivable et $z' = \frac{-y'}{y^2}$ donc en divisant l'équation différentielle précédente par y^2 , on déduit :

$$-z' = k \frac{1-y}{y} = k(z-1).$$

Donc z vérifie $z' = -kz + k$.

- On cherche une solution particulière sous la forme d'une constante, on trouve que la constante 1 est solution, donc l'ensemble des solutions est :

$$\{t \in \mathbb{R}^+ \mapsto Ke^{-kt} + 1 \mid K \in \mathbb{R}\}.$$

Donc y est de la forme : $y : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{Ke^{-kt} + 1}$.

- On peut imaginer que 8 heures correspond à l'origine de l'échelle des temps de sorte que l'on cherche y vérifiant $y(0) = 80$ ce qui est équivalent à $K+1 = \frac{1}{80}$ d'où $K = -\frac{79}{80}$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y(t) = \frac{1}{1 - \frac{79}{80}e^{-kt}}.$$

On a comme condition : $\frac{1}{1 - \frac{79}{80}e^{-4k}} = 500$ ce qui permet de fixer k :

$$1 - \frac{79}{80}e^{-4k} = \frac{1}{500} \iff \frac{499 \times 80}{500 \times 79} = e^{-4k} \iff e^{-4k} = \frac{1996}{1975} \iff k = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{1996}{1975}\right).$$

On cherche alors t de sorte que

$$\frac{1}{1 - \frac{79}{80}e^{-kt}} = 900 \iff 1 - \frac{79}{80}e^{-kt} = \frac{1}{900} \iff \frac{899}{900} = \frac{79}{80}e^{-kt}.$$

On trouve alors : $t = -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{3596}{3555}\right) \approx 4.41 \text{ heures.}$

Solution (exercice 22) [Énoncé]

- [Positivité]** On cherche déjà à prouver que pour tout $t \geq 0$, $P(t) \in]0, \kappa[$.

On suppose que P est une solution, et on note $f(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right)$.

- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables. De plus, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= rP'(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right) + rP(t)\left(-\frac{1}{\kappa}P'(t)\right) \\ &= r^2P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right)^2 - \frac{r^2}{\kappa}P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right) \\ &= rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right)\left[r\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right) - \frac{r}{\kappa}\right] \\ &= f(t)g(t), \end{aligned}$$

où $g(t) = r\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right) - \frac{r}{\kappa}$ pour tout $t \geq 0$. Constatons que g est une fonction continue, donc f est solution de $y' = g(t)y$, une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus.

- On a

$$f(0) = rP_0\left(1 - \frac{P_0}{\kappa}\right) > 0$$

car $\frac{P_0}{\kappa} \in]0, 1[$ par hypothèse. Donc $f(0) \neq 0$, par ailleurs, d'après la question précédente, si on note G la primitive de g qui s'annule en zéro, alors

$$f(t) = f(0) \cdot e^{G(t)},$$

or $e^{G(t)} \neq 0$ pour tout t donc $f(t) \neq 0$ pour tout $t \geq 0$.

- Notons $Q = rX\left(1 - \frac{X}{\kappa}\right)$, c'est un polynôme de degré deux, de graphe une parabole orientée vers le bas, et de racines $0, \kappa$.

$$f = Q \circ P.$$

On sait que $P(0) \in]0, \kappa[$, donc la valeur initiale de P se situe strictement entre les racines de Q et $f(0) > 0$ (le polynôme Q est positif entre ses racines). Si en un certain t , $P(t) \notin]0, \kappa[$ alors $f(t) < 0$. Puisque f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait t tel que $f(t) = 0$ — contradiction. Donc $\text{pour tout } t \geq 0, P(t) \in]0, \kappa[$.

2. [Résolution]

- Après calculs, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \kappa\}, \quad \frac{\kappa}{x(\kappa - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\kappa - x}.$$

- On sait que f ne s'annule pas, donc on peut commencer par diviser

de chaque côté l'équation différentielle par f . On résout alors :

$$\frac{P'(t)}{rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right)} = \frac{P'(t)}{r} \frac{\kappa}{P(t)(\kappa - P(t))} = 1.$$

D'après la question précédente, elle est équivalente à

$$\frac{P'(t)}{r} \left(\frac{1}{P(t)} + \frac{1}{\kappa - P(t)} \right) = 1,$$

ou encore

$$\frac{1}{r} \left(\frac{P'(t)}{P(t)} - \frac{-P'(t)}{\kappa - P(t)} \right) = 1.$$

En primitivant de chaque côté, on déduit l'existence d'une constante $K \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{r} (\ln |P(t)| - \ln |\kappa - P(t)|) = t + K.$$

Par propriété du log, en passant à l'exponentielle, et en utilisant le fait que $P(t) \in]0, \kappa[$, on obtient finalement

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P(t)}{\kappa - P(t)} = e^{r(t+K)} \iff P(t) = \frac{\kappa e^{r(t+K)}}{1 + e^{r(t+K)}}.$$

Solution (problème 1) [Énoncé]

1. 1.1) La fonction $g_1 : x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux). Pour tout réel x , on a : $g_1'(x) = -e^{-x} \implies g_1''(x) = e^{-x} \implies g_1'''(x) = -e^{-x}$. Ainsi, pour tout réel x : $g_1'''(x) + 5g_1''(x) + 9g_1'(x) + 5g_1(x) = -e^{-x} + 5e^{-x} - 9e^{-x} + 5e^{-x} = 0$. Donc g_1 est solution de **(H)**.

1.2) La fonction $g_2 : x \mapsto e^{-2x} \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux). Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} g_2'(x) &= -2e^{-2x} \cos(x) - e^{-2x} \sin(x) \\ \implies g_2''(x) &= 3e^{-2x} \cos(x) + 4e^{-2x} \sin(x) \\ \implies g_2'''(x) &= -2e^{-2x} \cos(x) - 11e^{-2x} \sin(x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} g_2'''(x) + 5g_2''(x) + 9g_2'(x) + 5g_2(x) &= -2e^{-2x} \cos(x) - 11e^{-2x} \sin(x) + 5[3e^{-2x} \cos(x) + 4e^{-2x} \sin(x)] \\ &\quad + 9[-2e^{-2x} \cos(x) - e^{-2x} \sin(x)] + 5e^{-2x} \cos(x) \\ &= e^{-2x} \cos(x)(-2 + 15 - 18 + 5) + e^{-2x} \sin(x)(-11 + 20 - 9) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc g_2 est solution de **(H)**.

1.3) Puisque g_1, g_2 et g_3 sont solutions de la même équation différentielle homogène linéaire **(H)** alors (par linéarité de la dérivation) toute com-

binaison linéaire de g_1, g_2 et g_3 est encore solution de **(H)** (d'après le cours).

Ainsi : $\forall f \in \mathcal{E}, f \in \mathcal{S}$. Ce qui s'écrit encore : $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.

2. 2.1) On a : $g = f''' + 4f' + 5f \implies g' = f'''' + 4f'' + 5f'$. Alors : $g' + g = f'''' + 4f'' + 5f' + 4f''' + 5f' + f'' + 4f' + 5f = f'''' + 5f'' + 9f' + 5f = 0$ car f est solution de **(H)**.

Ainsi : g est solution de **(H1)** $y' + y = 0$.

2.2) D'après le cours, l'ensemble des solutions est $\{x \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-x} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

2.3) L'équation caractéristique associée à **(H2)** est $r^2 + 4r + 5 = 0$. Ses solutions sont les complexes conjugués $-2 \pm i$. L'ensemble des solutions de **(H2)** est alors :

$$\{x \in \mathbb{R} \mapsto (A \cos(x) + B \sin(x))e^{-2x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2.4) On cherche une solution particulière de **(H3)** sous la forme $y_0 : x \mapsto Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. On a de plus :

$$\begin{aligned} y_0 \text{ solution de } (H_3) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0''(x) + 4y_0'(x) + 5y_0(x) = \lambda e^{-x} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad Ce^{-x} - 4Ce^{-x} + 5Ce^{-x} = \lambda e^{-x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car} \\ \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \neq 0 \end{array} \right\} \\ &\iff C - 4C + 5C = \lambda \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, y_0(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-x}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de **(H3)** est donc :

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto (A \cos(x) + B \sin(x))e^{-2x} + \frac{\lambda}{2} e^{-x} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2.5) D'après ce qui précède, si $f \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire si f est solution de **H**, alors f est solution de **(H3)**, c'est-à-dire : $\exists(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (\alpha \cos(x) + \beta \sin(x))e^{-2x} + \lambda e^{-x} = \lambda g_1(x) + \alpha g_2(x) + \beta g_3(x).$$

Ainsi f est une combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3 donc $f \in \mathcal{E}$. On a donc : $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.

3. D'après ce qui précède, on a :

$$\exists(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda g_1(x) + \alpha g_2(x) + \beta g_3(x).$$

Autrement dit :

$$\exists(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ((\beta - 2\alpha) \cos(x) - (\alpha + 2\beta) \sin(x))e^{-2x} - \lambda e^{-x}.$$

Il reste à traduire le système de conditions initiales.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) = 0 & = \lambda + \alpha \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} & = \beta e^{-\pi} + \lambda e^{-\frac{\pi}{2}} \\ f'(0) = 1 & = \beta - 2\alpha - \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\lambda \\ \beta = 1 - \lambda \\ (1 - \lambda)e^{-\frac{\pi}{2}} + \lambda = 1 \end{cases} \\ \iff \lambda = 1, \alpha = -1, \beta = 0. \end{aligned}$$



Finalement, l'unique solution de (E) est : $x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{-x} - \cos(x)e^{-2x}$.