Programme de colles
du 9 au 13/11/2026

- Cette semaine : 1 question par étudiant(e) à choisir dans la liste.
- Sur sup / inf : je ferai des calculs de borne sup/inf de fonctions au moment du chapitre sur les limites. On évite donc pour l'instant les études de fonctions.

Attention

Pas encore d'exercice sur ch, sh cette semaine, seulement des questions de cours. Je n'aurai pas eu le temps encore de faire des exercices sur le sujet.

1. COMPLÉMENTS SUR LES RÉELS

- **Parties majorées / minorées de** $\mathbb{R}$ Définition de partie majorée / minorée / bornée, notion de borne supérieure / inférieure, maximum / minimum. Caractérisation de la borne supérieure et inférieure.
- **Application : intervalles & droite achevée** détermination des intervalles de $\mathbb{R}$ en partant de la définition en tant que partie convexe de $\mathbb{R}$.
- **Application : partie entière** Partie entière : définition et caractérisation comme plus grand entier inférieur à un réel. Parties denses de $\mathbb{R}$: définition, densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Attention

La densité n'est pas explicitement au programme de PCSI ; en cas d'exercice sur le sujet, on rappellera aux étudiants tout élément de cours en cas de besoin (sans sanctionner).

2. FONCTIONS

Attention

Note aux colleurs : merci d'éviter les exercices avec uniquement des calculs de limites (ou alors 1 ou 2 maximum). Priorité aux études de fonctions pas trop techniques dans ce chapitre.

Attention

L'objectif de ce chapitre est de balayer toutes les notions permettant d'effectuer une étude complète de fonction :

- des généralités, en incluant la notion de composée, mais pas encore de fonction bijective.
- Des calculs pratiques de limites : règles usuelles, croissances comparées, théorèmes d'encadrement/majoration/minoration et quelques techniques pour lever des formes indéterminées. **Pas encore d'équivalents, et de théorème de convergence monotone *etc.*.**
- Sur la continuité : la définition de fonction continue et les opérations classiques sur les fonctions continues mais rien d'autre. **En particulier, pas encore de prolongement par continuité, d'équivalents et de « grands » théorèmes type théorème de la bijection, *etc.*.** Le théorème de la bijection sera vu dans un prochain chapitre. Les études de continuité de fonctions compliquées (avec parties entières par exemple, ou définies par morceaux) ne sont pas dans l'esprit de ce programme de colles.
- Des calculs pratiques de dérivées, mais là encore pas encore de « grand » théorème.

- **Généralités.** Fonction, et application. Image d'une fonction, graphe. Opérations sur les fonctions. Composée. Transformations de graphes. Parité, imparité, périodicité. Sens de variation. Fonctions bornées, majorées, minorées.
- **Calculs de limites & Continuité.** Limite à droite/gauche. Opérations. Composition des limites. Théorème d'encadrement, de majoration/minoration. Croissances comparées. Continuité en un point, sur un intervalle. Opérations et compositions de fonctions continues.
- **Calculs de dérivées.** Nombre dérivé, fonction dérivable. Équation de la tangente. Dérivable implique continue. Dérivée d'une composée. Monotonie et dé-

rivée. Utilisation de la dérivation pour calculer des limites. Signe de la dérivée et monotonie.

- **Fonctions usuelles.** Polynômes, carré, cube. Monôme inverse, racine carrée, limites de racines par expression conjuguée. Logarithme népérien, logarithme décimal. Puissances sous forme exponentielle. Valeur absolue. Partie entière. Fonctions circulaires : sin, cos et tan. Fonctions hyperboliques : ch et sh.

Attention

- ◇ La fonction th est hors-programme, mais peut naturellement faire l'objet d'exercices.
- ◇ Aucune formule de trigonométrie hyperbolique n'est exigible des étudiants, à part la relation $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.
- ◇ Les fonctions usuelle définies en tant que bijection réciproque (arcsin, arccos, arctan) ne sont pas encore au programme de colle.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définition de partie minorée et de la inférieure, en précisant notamment sous quelle condition suffisante ces notions existent.
[Exercice de cours] Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que inf(A) et sup(A) existent, et que : $\inf(A) \leq \sup(A)$.

2. Définition de partie majorée et de la borne supérieure, en précisant notamment sous quelle condition suffisante ces notions existent.
[Exercice de cours] Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset$, $A \subset B$, et B majorée. Montrer que sup(A) et sup(B) existent, avec : $\sup(A) \leq \sup(B)$.

3. Définir la partie entière puis justifier un encadrement où la partie entière apparait au milieu.
[Exercice de cours] Montrer que : $\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+\alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

4. Donner la définition de fonction dérivable en un point x_0 du domaine de définition, et de $f'(x_0)$. En déduire la limite $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ selon deux méthodes. *(d'une part en reconnaissant un taux d'accroissement, d'autre part en simplifiant l'expression.)*

5. Domaine de définition et dérivabilité de f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)$, puis calcul de la dérivée.

6. Domaine de définition et dérivabilité de g définie par $g(x) = \frac{x\ln(x)}{e^{x^2}}$, puis calcul de la dérivée.

7. Fonction usuelle partie entière. Donner sans démonstration : définition, domaine de définition, allure du graphe. Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{x \to \infty} \lfloor x \rfloor$.

8. Fonction usuelle tan. Donner sans démonstration : domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, dérivabilité.

9. Fonctions usuelles ch, sh : définitions puis étude complète, que l'on conclut par les deux graphiques. Justifier en plus la relation : $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.

10. Soit I un intervalle et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes dérivable.

- Rappeler ce que signifie que φ est dérivable.
- Puis montrer que e^{φ} est une fonction dérivable sur I et que :
  $\forall x \in I, \quad (e^{\varphi})'(x) = \varphi'(x) e^{\varphi(x)}$.

À venir : applications, et compléments sur les fonctions usuelles.