Programme de colles
du 16 au 20/11/2026

- Cette semaine : 1 question par étudiant(e) à choisir dans la liste.
- Sur les applications cette semaine : pas encore d'utilisation du théorème de la bijection pour les fonctions numériques, et pas encore arccos, arcsin et arctan. On prouve donc les notions d'injectivité, surjectivité *etc.* uniquement *via* les définitions et/ou la résolution d'une équation.

1. INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS. COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS USUELLES.



- **Fonctions & Applications.** *Dans la pratique, les étudiant(e)s sont libres de confondre le vocabulaire application et fonction.* Définitions. Égalité de deux applications. Graphe. Applications usuelles : identité, indicatrice, ligne de niveau de l'indicatrice. Restriction & prolongement. Composition d'applications. Propriété de la composition.
- **Injection, surjection, bijection.** Image directe, image directe d'une réunion et intersection. Image réciproque, image réciproque d'une réunion et intersection. Injection, surjection. Identité. Bijection. Reformulation à l'aide du nombre de solutions d'une équation. Réciproque d'une application. Si f est bijective : définition de f^{-1}, f^{-1} est la réciproque de f. Bijectivité et existence d'une réciproque. Propriété de $.^{-1}$: réciproque d'une composée et d'une réciproque. Image réciproque d'une partie dans le cas d'une application bijective.

2. FONCTIONS



Remarques

L'objectif de ce chapitre est de balayer toutes les notions permettant d'effectuer une étude complète de fonction :

- Des calculs pratiques de limites : règles usuelles, croissances comparées, théorèmes d'encadrement/majoration/minoration et quelques techniques pour lever des formes indéterminées. **Pas encore d'équivalents, et de théorème de convergence monotone *etc.*.**
- Sur la continuité : la définition de fonction continue et les opérations classiques sur les fonctions continues mais rien d'autre. **En particulier, pas encore de prolongement par continuité, de « grands » théorèmes type théorème de la bijection, *etc.*.** Le théorème de la bijection sera vu dans un prochain chapitre. Les études de continuité de fonctions compliquées (avec parties entières par exemple, ou définies par morceaux) ne sont pas dans l'esprit de ce programme de colles.
- Sur la dérivabilité : des calculs pratiques de dérivées, mais là encore pas encore de « grand » théorème, ni de dérivées n-ièmes (en particulier, la formule de Leibniz n'est pas encore à ce programme de colle).

Note aux colleurs : merci d'éviter les exercices avec uniquement des calculs de limites (ou alors 1 ou 2 maximum). Priorité aux études de fonctions pas trop techniques dans ce chapitre.

- **Généralités.** Fonction, et application. Image d'une fonction, graphe. Opérations sur les fonctions. Composée. Transformations de graphes. Parité, imparité, périodicité. Sens de variation. Fonctions bornées, majorées, minorées.
- **Calculs de limites & Continuité.** Limite à droite/gauche. Opsérations. Composition des limites. Théorème d'encadrement, de majoration/minoration. Croissances comparées. Continuité en un point, sur un intervalle. Opérations et compositions de fonctions continues.
- **Calculs de dérivées.** Nombre dérivé, fonction dérivable. Équation de la tangente. Dérivable implique continue. Dérivée d'une composée. Monotonie et dérivée. Utilisation de la dérivation pour calculer des limites. Signe de la dérivée et monotonie.
- **Fonctions usuelles.** Polynômes, carré, cube. Monôme inverse, racine carrée, limites de racines par expression conjuguée. Logarithme népérien, logarithme décimal. Puissances sous forme exponentielle. Valeur absolue. Partie entière.

Fonctions circulaires : sin, cos et tan. Fonctions hyperboliques : ch et sh.

Attention

- ◇ La fonction th est hors-programme, mais peut naturellement faire l'objet d'exercices.
- ◇ Aucune formule de trigonométrie hyperbolique n'est exigible des étudiants, à part la relation $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.
- ◇ Les fonctions usuelle définies en tant que bijection réciproque (arcsin, arccos, arctan) ne sont pas encore au programme de colle.

- **Dérivation d'une fonction à valeurs complexes.** Dérivabilité au moyen des parties réelles et imaginaires. Formules de dérivation pour les fonctions à valeurs complexes (linéarité, produit, quotient), formule de dérivée d'une composée de la forme e^{φ}, où φ dérivable à valeurs complexes.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A \subset E$. Définir l'ensemble $f(A)$.
Montrer que pour $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto x+y$, on a : $s([0,1]^2) = [0,2]$.

2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $B \subset F$. Définir l'ensemble $f^{\langle -1 \rangle}(B)$.
Rappeler la formule donnant « $f^{\langle -1 \rangle}(A \cup B)$ » pour A, B deux parties de F et la démontrer.

3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Écrire la **définition** *(avec quantificateurs !)* de « f injective » et « f surjective ». Écrire ensuite la négation de ces deux propriétés.

4. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Définir $f^{-1} : F \longrightarrow E$ (définition). Rappeler (avec hypothèses précises) la formule donnant $(g \circ f)^{-1}$, puis la démontrer.

5. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Définir $f^{-1} : F \longrightarrow E$ (définition).
Déterminer un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ tel que $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \frac{2x-1}{x+1} \end{array} \right.$ soit bijective et déterminer sa réciproque.

6. Donner la définition de fonction dérivable en un point x_0 du domaine de définition, et de $f'(x_0)$. En déduire la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ selon deux méthodes. *(d'une part en reconnaissant un taux d'accroissement, d'autre part en simplifiant l'expression.)*

7. Domaine de définition et dérivabilité de g définie par $g(x) = \frac{x \ln(x)}{e^{x^2}}$, puis calcul de la dérivée.

8. Fonction usuelle partie entière. Donner sans démonstration : définition, domaine de définition, allure du graphe. Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \lfloor x \rfloor$.

9. Fonction usuelle tan. Donner sans démonstration : domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, dérivabilité.

10. Fonctions usuelles ch, sh : définitions puis étude complète, que l'on conclut par les deux graphiques. Justifier en plus la relation : $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$.

11. Soit I un intervalle et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes dérivable.

- Rappeler ce que signifie que φ est dérivable.
- Puis montrer que e^{φ} est une fonction dérivable sur I et que :
$$\forall x \in I, \quad (e^{\varphi})'(x) = \varphi'(x) e^{\varphi(x)}.$$

À venir : compléments sur les fonctions usuelles puis primitives et intégration.