Programme de colles

du 23 au 27/11/2026

- Cette semaine : **1** question par étudiant(e) à choisir dans la liste.
- Cette semaine, uniquement des questions de cours sur primitives / intégrales.

1. PROGRAMME : PARTIE EXERCICES

Injections, surjections, bijections. Compléments sur les fonctions usuelles.



- **Fonctions & Applications.** *Dans la pratique, les étudiant(e)s sont libres de confondre le vocabulaire application et fonction.* Définitions. Égalité de deux applications. Graphe. Applications usuelles : identité, indicatrice, ligne de niveau de l'indicatrice. Restriction & prolongement. Composition d'applications. Propriété de la composition.
- **Injection, surjection, bijection.** Image directe, image directe d'une réunion et intersection. Image réciproque, image réciproque d'une réunion et intersection. Injection, surjection. Identité. Bijection. Reformulation à l'aide du nombre de solutions d'une équation. Réciproque d'une application. Si f est bijective : définition de f^{-1}, f^{-1} est la réciproque de f. Bijectivité et existence d'une réciproque. Propriété de $.^{-1}$: réciproque d'une composée et d'une réciproque. Image réciproque d'une partie dans le cas d'une application bijective.
- **Applications aux fonctions numériques.** Bijection numérique, obtenir le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f. Théorème de la bijection continu : utilisation pour l'existence et l'unicité d'une solution à une équation (plusieurs exemples, cas d'une suite implicite), utilisation pour déterminer des images directes de parties en combinant éventuellement avec la propriété « $f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \ldots$ ». Retour sur la racine cubique : existence et unicité, expression exponentielle. Dérivabilité d'une bijection réciproque. Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos, arctan; définition, propriétés, dérivabilité, graphe, limites usuelles. Étude des fonctions $x \longmapsto \arcsin(\sin x), x \longmapsto \arccos(\cos x)$.

2. PROGRAMME : PARTIE QUESTION DE COURS

1. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Définir l'ensemble $f(\mathrm{A})$.
   Montrer que pour $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto x+y$, on a : $s([0,1]^2) = [0,2]$.
2. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. Définir l'ensemble $f^{\langle -1\rangle}(\mathrm{B})$.
   Rappeler la formule donnant « $f^{\langle -1\rangle}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ » pour A, B deux parties de F et la démontrer.
3. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application. Écrire la **définition** *(avec quantificateurs !)* de « f injective » et « f surjective ». Écrire ensuite la négation de ces deux propriétés.
4. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bijective. Définir $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ (définition). Rappeler (avec hypothèses précises) la formule donnant $(g\circ f)^{-1}$, puis la démontrer.
5. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bijective. Définir $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ (définition).
   Déterminer un ensemble $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ tel que $g \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & \frac{2x-1}{x+1} \end{array}\right.$ soit bijective et déterminer sa réciproque.
6. Citer le théorème de la bijection. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ possède un unique « point fixe » sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :
   $\exists ! x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} = x$. Interpréter graphiquement l'égalité.
7. Citer le théorème de la bijection. Montrer que le polynôme $x \longmapsto x^3 + tx - 1$ admet une unique racine réelle $u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
8. Fonctions arccos, arcsin, arctan (une au choix du colleur) : définition **précise**, relation principale (écriture de « $f\circ f^{-1}$ » et « $f^{-1}\circ f$ »), puis étude de la dérivabilité/calcul de la dérivée, et le graphe (en rappelant celui de la réciproque).
9. Rappeler le domaine de dérivabilité d'arctan, la dérivée et montrer la formule ci-après : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$
10. Rappeler la définition d'une primitive F d'une fonction f définie sur un intervalle I. Puis, montrer que :
    - tout primitive s'écrit $\mathrm{F} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, et F une primitive de f.
    - Toute primitive F de f vérifiant $\mathrm{F}(x_0) = y_0$ où $(x_0, y_0) \in \mathrm{I}\times\mathbb{R}$ est unique.
11. Rappeler l'expression intégrale de l'unique primitive d'une fonction continue f s'annulant en a qui appartient au domaine de continuité de f, et démontrer ce fait. En déduire l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $x \longmapsto 2^x$.
12. Rappeler sans démonstration la dérivée de $\arctan(u)$ où u est une fonction dérivable. Déterminer ensuite une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

À venir : calcul intégral et le début des équations différentielles.