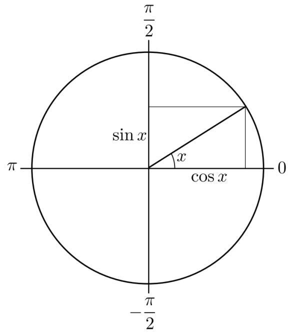
Outils mathématiques

I. Trigonométrie

Propriétés à connaître

$$\sin = \frac{\text{op}}{\text{hyp}}(\text{soh}) \quad \Big| \quad \cos = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}(\text{cah}) \quad \Big| \quad \tan = \frac{\text{op}}{\text{adj}}(\text{toa}) \quad \Rightarrow \text{"SohCahToa"}$$



Fonctions :
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Valeurs remarquables :
- $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$
- $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$
- $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$
- $\cos(-\pi/2) = 0$ et $\sin(-\pi/2) = -1$

Remarque : Valeurs à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique.

Additions :
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

En prenant $b = a$ on a donc $\begin{cases} \text{- } \sin(2a) = 2\sin a \cos a \\ \text{- } \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \end{cases}$

Formules avec π :
- $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$
- $\sin(x \pm \pi) = -\sin x$

Formules avec $\pi/2$:
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$

Remarque : A savoir retrouver avec un cercle trigonométrique, ou avec les formules d'additions ci-dessus (prendre $a = x$ et $b = \pi$ ou $b = \pi/2$).

Autres formules (pas à connaitre pour l'instant) :

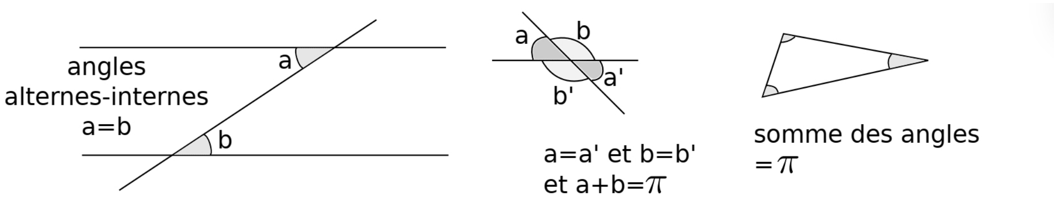
- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

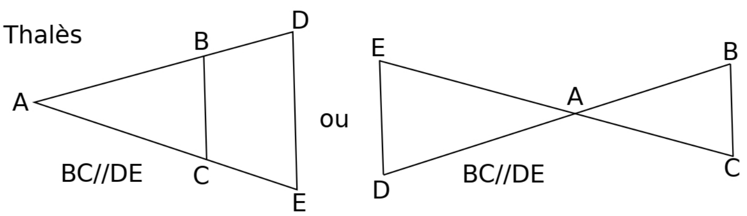
Le cercle trigonométrique permet de rapidement retrouver les valeurs remarquables, et les formules pour $\cos(x \pm \pi$ ou $\pi/2), \sin(x \pm \pi$ ou $\pi/2)$.

Exercices :

1) $\cos(\omega t - kx + \pi/2) = \pm\sin(\omega t - kx)$? (choisir le bon signe)
2) $\cos(\omega t - kx + \pi) = \pm\cos(\omega t - kx)$? (choisir le bon signe)
3) Exprimer $\sin(\omega t - kx)$ à l'aide d'un cosinus uniquement.

II. Géométrie, exemples

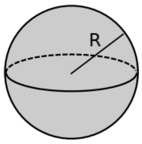




$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

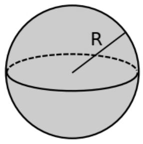
III. Volumes, surfaces, périmètres

A connaître (et surtout, attention à l'homogénéité : le volume est forcément en R^3, la surface en R^2, le périmètre en R, etc).



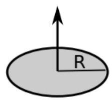
volume d'une boule

$\frac{4}{3}\pi R^3$



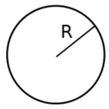
aire d'une sphère

$4\pi R^2$



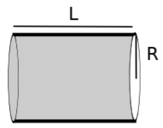
aire d'un disque

πR^2



circonférence d'un cercle

$2\pi R$



surface latérale d'un cylindre

$2\pi R \times L$

IV. Manipuler les fractions, résoudre des équations

Exercices :
Mettre sous une forme simplifiée ou au même dénominateur :

a) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$, b) $\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}$, c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, d) $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA}$ e) Isoler x : $\frac{1}{x+d} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$

f) On considère le système d'équations suivant, où c_p et c_s sont des vitesses, d une distance et t_0, t_s et t_p des temps :

$$\begin{cases} c_s = \dfrac{d}{t_s - t_0} \\ c_p = \dfrac{d}{t_p - t_0} \end{cases}$$

Les inconnues sont d et t_0. Montrer que $t_0 = \frac{c_p t_p - c_s t_s}{c_p - c_s}$ et $d = \frac{c_s c_p (t_s - t_p)}{c_p - c_s}$.

7 - On considère le système d'équations suivant, où f_1, f_2 et f_0 sont des fréquences, et c et v des vitesses :

$$\begin{cases} f_1 = f_0 \times \dfrac{c}{c-v} \\ f_2 = f_0 \times \dfrac{c}{c+v} \end{cases}$$

Les inconnues sont f_0 et v. Montrer que $v = c\frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}$ et $f_0 = \frac{2 f_1 f_2}{f_1 + f_2}$.

V. Résoudre une équation du second degré

Propriétés

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$. - Si $\Delta \geqslant 0$, les deux solutions réelles sont $x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. - Si $\Delta < 0$, les deux solutions complexes sont $x_\pm = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exercices :
1) L'inconnue est x, trouver les solutions réelles lorsqu'elles existent de (E) : $1 - 2x^2 - dx - d^2 = 0$
2) $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ Toutes les grandeurs sont des distances positives. Donner une condition pour qu'elle admette des solutions réelles. Lorsque cette condition est satisfaite, donner l'expression des deux solutions.

VI. Exponentielle et logarithme

Propriétés de l'exponentielle

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a\times b} & \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b} \\ \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b} & \mathrm{e}^{\ln x} = \ln(\mathrm{e}^x) = x \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a} & \boxed{\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x = \ln y} \end{array}$$

La fonction ln (logarithme népérien) est la fonction réciproque de l'exponentielle, elle est définie sur $]0, +\infty[$.
On a donc $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
Il existe aussi le logarithme décimal, défini comme $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. log est la fonction réciproque de $x \mapsto 10^x$ (donc $\log(10^x) = x$, et par exemple $\log 10 = 1$, $\log 10^2 = 2$, etc).

Propriétés des logarithmes (ln ou log)

$$\begin{array}{ll} \ln(ab) = \ln a + \ln b & \ln(1) = 0 \\ \ln(a/b) = \ln a - \ln b & \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \\ \ln(1/b) = -\ln b & \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \\ \ln\left(a^n\right) = n \ln a & \end{array}$$

Exercices :
1) On considère la fonction $f(t) = f_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Donner l'expression du temps t au bout duquel on a $f(t) = f(0)/2$ (aussi appelé temps de demi-vie, ou de demi-réaction).
2) On considère la fonction $f(t) = A\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$. Donner l'expression du temps t au bout duquel on a $f(t) = 0,99$ A.

VII. Puissances

Propriétés

$$\left(x^a\right)^b = x^{a\times b}$$
$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$
$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$
$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

Autres propriétés

$$\sqrt{x} = x^{1/2} \text{ et } \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$
$$x^a = y \Leftrightarrow x = y^{1/a}$$

Remarque : La dernière propriété se démontre facilement :

$$x^a = y \Leftrightarrow \left(x^a\right)^{1/a} = y^{1/a} \Leftrightarrow x^{a\times\frac{1}{a}} = y^{1/a} \Leftrightarrow x = y^{1/a}.$$

Exercices :
Donner le résultat des valeurs suivantes sous la forme 10^n. Par exemple dans le premier cas on doit trouver 10^{-1} :

$$1)\quad \frac{10^3 \times 10^{-10}}{\left(10^{-2}\right)^3}, \quad 2)\quad \frac{\left(10^4\right)^2 \times 10^{-34}}{\left(10^{-1}\right)^2 \times \left(10^{0,5}\right)^2}, \quad 3)\quad \frac{\sqrt{10^3 \times 10^5}}{\left(10^8\right)^{1/4}}$$

Simplifier les expressions ci-dessous sous la forme x^α. Par exemple dans le premier cas on doit arriver à x^{-3a} :

$$4)\quad \left(\frac{1}{x^a}\right)^3, \quad 5)\quad \left(\frac{\sqrt{x}}{x^a}\right)^4, \quad 6)\quad x \times \sqrt{x}$$

VIII. Calculs de dérivées

Propriétés de la dérivation

$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$
$$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$$
$$(g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x))$$

Dérivées usuelles

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

IX. Primitives et intégrales

Propriétés importantes des primitives

Soit $f(t)$ une fonction. Une primitive de f est une fonction F telle que sa dérivée redonne f :

$$F'(t) = f(t)$$

Exemple : $f(t) = t$. Une primitive est $F(t) = \dfrac{t^2}{2}$, car on a bien $F'(t) = t$. Les primitives sont toujours à une constante près.

Par exemple ci-dessus, $F(t) = \dfrac{t^2}{2} + 5$ convient aussi.

Primitives usuelles

$$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1} + A \qquad \mathrm{e}^x \to \mathrm{e}^x + A$$
$$\cos x \to \sin x + A \qquad \frac{1}{x} \to \ln x + A$$
$$\sin x \to -\cos x + A$$

Avec A une constante d'intégration.

Pour trouver ou vérifier une primitive, on la dérive : il faut alors retomber sur la fonction de départ !
Exercices :
Pour chaque fonction $f(t)$ proposée ci-dessous, on demande a) de trouver une primitive $F(t)$; puis b) de dériver cette primitive (donc calcul de $F'(t)$) pour vérifier que l'on retombe bien sur $f(t)$ et que la primitive proposée en a) est correcte.

1) $f(t) = \cos(\omega t)$ 4) $f(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}$
2) $f(t) = \sin(\omega t)$ 5) $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$
3) $f(t) = \mathrm{e}^{at}$ 6) $f(t) = \cos(4\omega t + \varphi)$
7) $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 7t + 1$

Exemple de rédaction attendue pour la question 1 :
a) Primitive : essayons $F(t) = sin(\omega t)$. Alors $F'(t) = \omega\cos(\omega t) \neq f(t)$! Raté. Mais on élimine ce ω en trop en prenant $F(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$.
b) Vérification par calcul de $F'(t)$: $F'(t) = \dfrac{\omega\cos(\omega t)}{\omega} = \cos(\omega t) = f(t)$, c'est donc correct.
Calculer les intégrales suivantes. Les questions 9 à 12 correspondent au calcul de la valeur moyenne ou quadratique de certains signaux, avec $T = 2\pi/\omega$, et sont intéressantes pour les chapitres sur les ondes.

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t.$ 9) $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$ 11) $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\cos^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$
10) $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0\sin(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$ 12) $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2\sin^2(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t.$

Pour les $\cos^2$ et $\sin^2$, on linéarisera en utilisant certaines des formules pour $\cos(2a)$ données dans l'encadré précédent.
Les réponses auxquelles il faut parvenir sont, dans l'ordre : $\tau, 0, 0, \dfrac{s_0^2}{2}$ et $\dfrac{s_0^2}{2}$.

X. Développements limités

DL à connaître

- $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + \alpha x$ (donc pour $\alpha = -1$: $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{\simeq} 1 - x$)
- $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 + x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\simeq} x$
- $\cos x \underset{x\to 0}{\simeq} 1 - \dfrac{x^2}{2}$
- $\sin x \underset{x\to 0}{\simeq} x$
- $\tan x \underset{x\to 0}{\simeq} x$

(on a omis d'ajouter le $\mathrm{o}(x)$ ou $\mathrm{o}\left(x^2\right)$ comme en mathématique)

Ces développements limités proviennent de la formule de Taylor. Pour une fonction $f(x)$,
- A l'ordre 1 : $f(x) \underset{x\to 0}{\simeq} f(0) + xf'(0) + o(x)$.
- A l'ordre 2 : $f(x) \underset{x\to 0}{\simeq} f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!}f''(0) + o\left(x^2\right)$.

Et si on souhaite écrire un développement de Taylor ailleurs qu'en $x = 0$, mais en x quelconque, pour un $\mathrm{d}x$ petit :
- A l'ordre 1 : $f(x + \mathrm{d}x) \underset{\mathrm{d}x\to 0}{\simeq} f(x) + \mathrm{d}xf'(x) + \mathrm{o}(\mathrm{d}x)$. (en mathématiques $\mathrm{d}x$ est souvent noté h, et si on isole $f'(x)$ on trouve la définition de la dérivée : $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$)