Mesures et incertitudes

Fiche à avoir à chaque TP

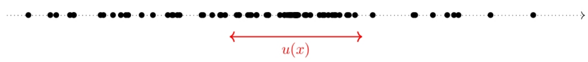
I. Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type.

1. Cas où on répète la mesure (évaluation de type A))

- **Variabilité** : plusieurs mesures d'une même caractéristique donnent des valeurs différentes x_i. On peut calculer pour cette série :

- leur valeur moyenne : $m_x = \langle x \rangle = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- leur **incertitude-type** = écart-type : $u(x) = \sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x \rangle)^2}$ (unité de x)
  - TI : touche Sx
  - Casio : touche σ_{n-1}
  - Numworks : "Ecart-type échantillon"
  - Python : `np.std(liste, ddof=1)`
- **leur incertitude-type relative** $= \dfrac{u(x)}{x}$. (sans unité, souvent exprimée en pourcentage)

Signification pour **une** des mesures x_i : la valeur réelle de la grandeur est avec une bonne probabilité dans l'intervalle $x_i \pm \text{qq}u(x)$.



La **moyenne** des mesures permet de gagner en précision, l'incertitude sur la moyenne est plus faible que celle sur une mesure :

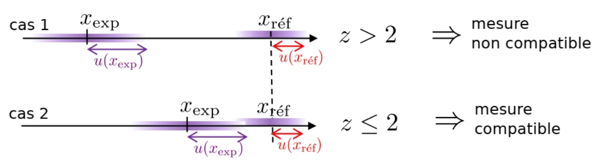
$$\boxed{u(\langle x \rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}}u(x)}$$

La valeur réelle de la grandeur est avec une bonne probabilité dans l'intervalle $\bar{x}\pm$ qq $u(\bar{x})$, (on est donc $\sqrt{N}$ fois plus précis).

2. Comparaison de deux processus de mesures distincts de la même grandeur :

On calcule leur écart normalisé (dit aussi Z-score) :

$$\boxed{Z_{12} = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}$$



Deux estimations sont compatibles si $Z \leqslant 2$ environ.

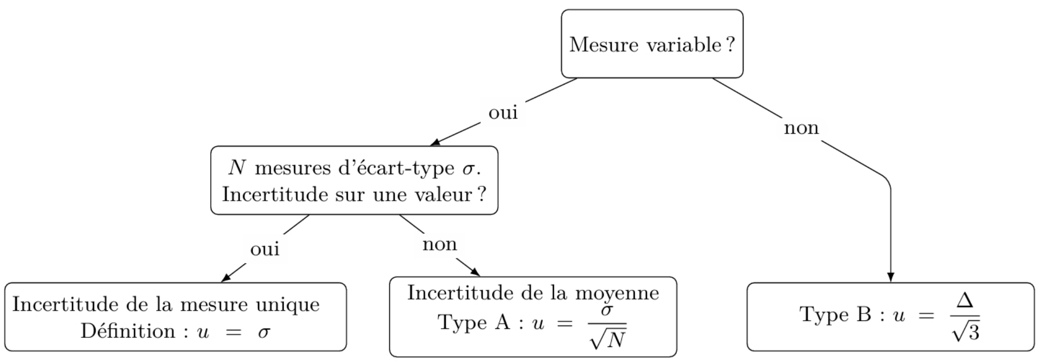
3. Expériences sans variabilité observée : incertitude de type B (Une seule mesure)

Si on obtient donc toujours le même résultat (variabilité plus faible que la précision de la mesure), ou s'il est difficile de reproduire une expérience, il faut estimer théoriquement l'incertitude-type de la mesure.
On **estime** (personnellement ou à l'aide de la notice de l'appareil) la demi-largeur Δ ("précision" de la mesure ou de l'appareil), telle qu'on soit presque certain que la valeur mesurée est dans $[x - \Delta, x + \Delta]$.

L'incertitude type est alors $\boxed{u\left(x_m\right) = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{3}}}$

<u>**Exemple :**</u> On lit sur un ohmmètre une valeur de 465 Ω pour une résistance de valeur donnée à 470Ω par son code couleur de précision 5% (demi largeur).
- Donc $R_{\text{code}} = (470 \pm 0,05 \times 470) = (470 \pm 24)\Omega$ d'où l'évaluation $R_{\text{code}} = 470\Omega$ avec l'incertitude type $u(R)_{\text{code}} = 14\Omega$
- La notice du multimètre indique une précision à 1% de la valeur lue et 2 digits : $R_{Ohm} = (465\pm 7)\Omega$ d'où l'évaluation $R_{Ohm} = 465\Omega$ avec $u(R)_{Ohm} = 4\Omega$
- Z-score : $Z = \dfrac{|R_{\text{code}} - R_{\text{Ohm}}|}{\sqrt{u^2(R)_{\text{code}} + u^2(R)_{\text{Ohm}}}} = 0,34 < 2$, mesures cohérentes !

En résumé



II. Les incertitudes type composées

1. De type somme : $\boxed{y\left(x_1, x_2\right)=\alpha x_1+\beta x_2 \Rightarrow u(y)=\sqrt{\left(\alpha u\left(x_1\right)\right)^2+\left(\beta u\left(x_2\right)\right)^2}.}$

Exemple : distance d entre deux cavaliers sur un banc d'optique d'abscisses estimées (type B) $x_1=(43,3 \pm 0,3)$cm et $x_2=(85,4 \pm 0,3)$cm. Calculer $u(x_1), u(x_2), d$ et $u(d)$

2. De type produit/fraction : $\boxed{y\left(x_1, x_2\right)=a {x_1}^\alpha {x_2}^\beta \Rightarrow \frac{u(y)}{y}=\sqrt{\left(\alpha \frac{u\left(x_1\right)}{x_1}\right)^2+\left(\beta \frac{u\left(x_2\right)}{x_2}\right)^2}.}$

Remarque : Dans les formules de types produit/fraction, si une des incertitudes relatives est prépondérante (**10 fois plus grande** que les autres), on peut négliger les autres.

3. De type quelconque : méthode de Monte-Carlo = simulation informatique

Soit à estimer $y=f\left(x_1, .., x_i, .., x_p\right)$

- On se fixe un nombre N de simulations à réaliser.
- Pour k entre 1 et N, on réalise un tirage aléatoire des $\mathrm{x_i}$ distribués uniformément sur $\mathrm{x_i} \pm \Delta \mathrm{x_i}$, $\Delta \mathrm{x_i}$ estimé en fonction des sources de variabilité identifiées par l'expérimentateur.
- On calcule les $\mathrm{y_k}$ à l'aide de la fonction f.
- La moyenne des y_k fournit une estimation de la valeur de y, leur l'écart-type une incertitude-type sur y.

```
import numpy as np # utilisation de la bibliothèque numpy, qu'on note np
dmin = 15.5
dmax = 16.5
def f(x):          # définition de la fonction de compasition
    return 1/x
N = 10000           # nombre de tirages au sort
resultats = []         # création d'une liste vide
for i in range (N):                        # on répète N fois
    d = np. random . uniform (dmin , dmax ) # tirage au sort d'une valeur entre dmin et dmax
    resultats . append (f(d))              # ajout de cette valeur à la liste
moyenne = np.mean(resultats)
ecart_type = np.std(resultats,ddof=1)
print('Moyenne =', moy,'   Ecart type = ',ecart_type)
```

Exemple : $x=2,1234$ s et $u(x)=0,10$ s sera plutôt écrit $x=2,12$ s et $u(x)=0,10$ s.

III. Discussion éventuelle

L'incertitude-type est une *estimation* de la variabilité de la mesure. Ainsi, il est naturel que des points expérimentaux soient éloignés de la valeur de la modélisation de quelques incertitudes-type.

Cependant, lorsque les mesures ne sont pas compatibles avec la valeur de référence ou la valeur calculée via la théorie, il faut chercher à comprendre pourquoi.

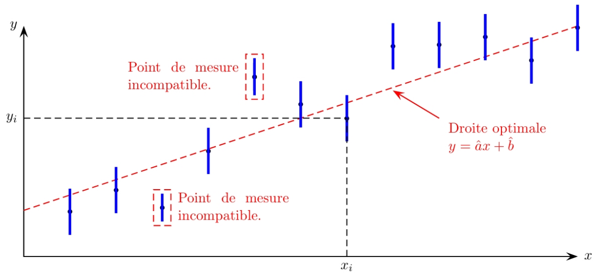
- Un problème venant de l'expérimentateur : mauvaise manipulation ? erreur de protocole ?
- Un problème de matériel : les composants ou solutions utilisées n'ont pas les valeurs indiquées...
- Une sous-estimation des incertitudes
- Un problème au niveau de la théorie ou du modèle utilisé : Si toutes les causes précédentes sont écartées, alors c'est que l'expérience invalide le modèle utilisé. Par exemple certaines hypothèses du modèle sont exagérées (il faut prendre en compte les frottements, la résistance interne du GBF, le fait que la masse n'est pas ponctuelle, etc.).

IV. Quand utiliser une régression linéaire ?

Une régression linéaire permet de trouver la « meilleure droite » modélisant le mieux le comportement de ces points.

En pratique, le modèle linéaire sera validé si, **à l'œil,** les points de mesure sont bien alignés et que la droite passe au plus proche de tous les points possibles, **en incluant leurs incertitudes-type.**

- Attention ! Le coefficient r^2 n'a aucun intérêt pour valider un modèle physique ou pour estimer des incertitudes-type.



V. Extraits de rapports

- L'évaluation des incertitudes et l'identification des sources principales d'erreur sur des mesures simples doivent être proposées plus spontanément par les candidats. Les candidats doivent exploiter et discuter leurs mesures. La validation d'une loi s'effectue à l'aide d'une régression linéaire adaptée (pas à l'oeil) et discutée.
- Pendant la phase de mesure, beaucoup de candidats confondent résolution d'un appareil et incertitude de mesure, ce qui conduit souvent à passer sous silence les causes principales d'incertitudes et à appliquer des modèles sur des incertitudes négligeables.