Quelques équations différentielles indispensables en physique

Tous les problèmes de concours font appel à ces résultats, qu'il faut donc absolument apprendre par coeur et maitriser ! (Petites feuilles...)

On se limitera ici aux équations différentielles linéaires de degré 1 et 2 à coefficients constants et à second membre constant. C'est à dire les équations qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$y' + a_0 y = b \quad \text{et} \quad y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

ou encore avec la notation différentielle de variable t :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b$$

I. Méthode générale de résolution d'une équation différentielle

A savoir absolument par coeur et dans l'ordre !

① On résout l'équation homogène c'est à dire sans second membre (ici $y' + a_0 y = 0$ ou $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$)
② On détermine **une** solution particulière y_{part} de l'équation avec second membre.
③ La **solution générale** est la somme des solutions homogène et particulière : $y_{\text{gén}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$
④ On applique **finalement** la ou les conditions initiales sur la **solution générale** (et pas sur la solution homogène !!!) pour trouver **la** solution qui convient au problème physique.

Remarque : Comme le second membre est ici pris constant (b), on a $y_{\text{part}} = \frac{b}{a_0}$
⇝ *Justifier ce résultat*

II. Premier ordre avec second membre constant : $b(t) = b$

1. Résultat mathématique

Les solutions de $y' + a_0 y = b$ sont **les** fonctions y de la forme $y(t) = \lambda e^{-a_0 t} + \frac{b}{a_0}$ avec λ constante réelle (il y en a une infinité !)

2. Notation physique

On préfère écrire en physique l'équation de premier ordre sous la forme :

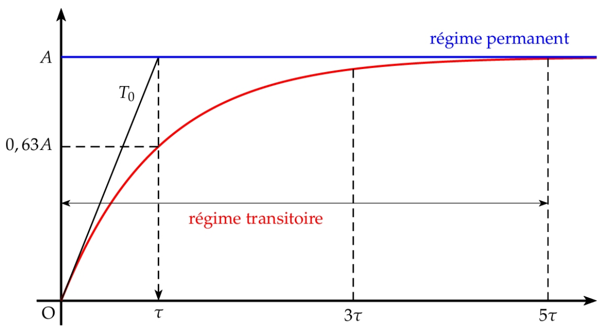
$$\boxed{y' + \frac{1}{\tau} y = b = \frac{y_\infty}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{a_0} \text{ temps caractéristique}}$$

Les solutions sont alors : $\boxed{y(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + b\tau = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + y_\infty}$
⇝ *Justifier la notation y_∞*
Le problème physique n'ayant qu'**une** solution, on détermine la valeur de λ à l'aide d'une condition initiale, souvent avec $y(0)$.

3. Interprétation graphique

On obtient une fonction croissante ou décroissante selon le signe de λ.
La solution particulière fixe le régime permanent et la solution homogène fixe le régime transitoire.
Exemples très fréquents :

• $\lambda < 0$ et $y(0) = 0$ on a alors $y(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
⇝ *Exprimer A en fonction des notations du paragraphe 2.*
T_0 représente la tangente à la courbe en 0.
Elle coupe l'asymptote du régime permanent au point d'abscisse (= à l'instant) $t = \tau$.
⇝ Le démontrer en écrivant l'équation de la tangente à l'origine : sa pente est par définition la valeur de la dérivée de $y(t)$ en $t = 0$, et en cherchant l'intersection de cette droite avec celle d'équation $y = A$



On peut retenir

τ	3τ	5τ
63%	95%	99%

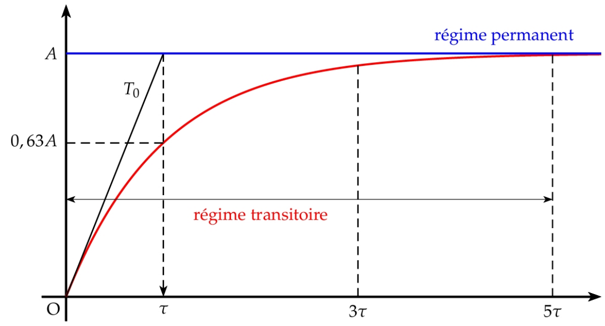
⇝ *Vérifier ces valeurs en calculant à la machine $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ à ces trois instants.*

• $\lambda > 0$ et $y(0) = A$ on a alors $y(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$
T_0 représente la tangente à la courbe en 0 . Elle coupe l'asymptote du régime permanent (ici l'axe des abscisses) à $t = \tau$.

On peut retenir

τ	3τ	5τ
37%	5%	1%

$\boxed{\tau \text{ représente l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.}}$



III. Second ordre

1. Résultats mathématiques

A l'équation différentielle $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, on associe le polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + a_1 X + a_0$ de discriminant Δ.

- Si $\Delta > 0, P$ admet deux racines réelles X_1 et X_2, les solutions sont : $y(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta = 0, P$ admet une racine double X_0, les solutions sont : $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{X_0 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta < 0, P$ admet deux racines complexes conjuguées $X_1 = X_0 + i\omega$ et $X_2 = X_0 - i\omega$, alors les solutions peuvent se mettre sous la forme : $\begin{cases} y(t) = \lambda e^{X_0 t}[\sin(\omega t + \varphi)], \quad (\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{ ou } y(t) = e^{X_0 t}[\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)], \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

Dans le cas particulier $y'' + a_0 y = 0$ (donc $a_1 = 0$ et $\Delta < 0$), P a des racines imaginaires pures $X_1 = i\omega$ et $X_2 = -i\omega$, alors $\begin{cases} y(t) = \lambda \sin(\omega t + \varphi) \\ \text{ou } y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \end{cases}$

2. Notations physiques

On préfère écrire en physique la forme canonique : $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0$ avec $\begin{cases} \alpha \textbf{ coefficient d'amortissement } (\text{rad.s}^{-1}) \\ \omega_0 \textbf{ pulsation propre } (\text{rad.s}^{-1}) \end{cases}$

Alors $\Delta = 4\left(\alpha^2 - \omega_0^2\right)$.

• Si $\Delta > 0$, comme α et ω_0 sont positifs, les racines réelles X_1 et X_2 sont négatives. Les solutions de l'équation homogène sont la combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes :

$$y(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t}$$

Le régime est dit **apériodique**, il n'y a pas d'oscillation autour de l'axe des abscisses.

• Si $\Delta = 0$, comme les coefficients α et ω_0 sont positifs, la racine double X_0 est négative. Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = (\lambda + \mu t)e^{X_0 t}$$

Le régime est dit **apériodique critique**, il n'y a pas d'oscillation autour de l'axe des abscisses, et le **retour à l'équilibre** est alors **le plus rapide**.

• Si $\alpha = 0$ on a alors $\Delta = -\omega_0^2$. Les racines sont donc $\pm i\omega_0$. Les solutions sont purement sinusoïdales :

$$y(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t) \text{ ou } y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Le régime est dit **harmonique**.

• Si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées. On pose $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Les racines sont alors $-\alpha \pm i\omega_p$ et les solutions de l'équation :

$$y(t) = [\lambda \cos(\omega_p t) + \mu \sin(\omega_p t)]\, e^{-\alpha t} \text{ ou } y(t) = A \sin(\omega_p t + \varphi)\, e^{-\alpha t}$$

Le régime est dit **pseudo-périodique**, il y a donc des oscillations autour de l'axe des abscisses de moins en moins grande avec une fréquence plus petite que la fréquence propre ($\omega_p < \omega_0$).

Schématiquement :