Problème 1 : Analyse dimensionnelle

1) La gravité attire vers le bas les molécules d'eau
⇒ sans tension superficielle surface plate (E_p mini) 1

2) Sans gravité, minimiser E_S revient à minimiser la surface ⇒ forme sphérique 1

3) Par exemple, $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow [E_c] = kg\,(m\,s^{-1})^2$

$$\boxed{[E_c] = kg\, m^2 s^{-2}}$$ 1

4) On a $[E_p] = [C_1 \rho^\alpha R^\beta g^\eta]$ donc comme g en $m\,s^{-2}$ (accélérat°)

$kg\, m^2 s^{-2} = \left(\frac{kg}{m^3}\right)^\alpha m^\beta (m\,s^{-2})^\eta$. En séparant les différentes unités, on a le système :

$$\begin{cases} kg \rightarrow & 1 = \alpha \\ m \rightarrow & 2 = -3\alpha + \beta + \eta \\ s \rightarrow & -2 = -2\eta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \eta = 1 \end{cases}} ; \quad \boxed{E_p = C_1 \rho R^4 g}$$ 2

5) $[E_S] = [C_2 \gamma^\delta R^\varepsilon] \Leftrightarrow kg\, m^2 s^{-2} = \left(\frac{kg\, \cancel{m^2}\, s^{-2}}{\cancel{m^2}}\right)^\delta m^\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \delta \\ 2 = \varepsilon \\ -2 = -2\delta \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \delta = 1 \\ \varepsilon = 2 \end{matrix}} , \quad \boxed{E_S = C_2 \gamma R^2}$$ 2

6) Alors, $\rho R^4 g = \gamma R^2 \Rightarrow R = \boxed{\ell_p = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}}$ 1

7) AN : $\ell_p = \sqrt{\frac{73.10^{-3}}{10^3 \times 9{,}8}} = 2{,}7\ mm$ 2

⚠ en $kg\, \underline{m^{-3}}$

Ordre de grandeur correct :
- goutte rosée ≃ 1 mm ronde
- goutte pluie ≃ 5 mm allongée
- éprouvette ≃ 1 cm ∼ ménisque

Correction DS n°1

Problème 1 : Etude optique de l'oeil (e3a, PSI, 2025)

1.

oeil	rétine	cristallin	pupille
appareil photographique	capteur CCD ou pellicule	lentille convergente	diaphragme

3

2. Un oeil emmétrope permet de former l'image d'un objet à l'infini au niveau de la rétine. La distance cristallin-rétine correspond donc à la distance focale de la lentille mince ici considérée. 1

La vergence $V_{min} = \frac{1}{f'}$ vaut donc $V_{min} = \frac{1}{17.10^{-3}} \approx \underline{59\,\delta}$. 1

3. • La distance cristallin-rétine reste inchangée. Lorsque l'objet se rapproche, le cristallin doit donc se bomber. Ainsi il augmente sa vergence. 1

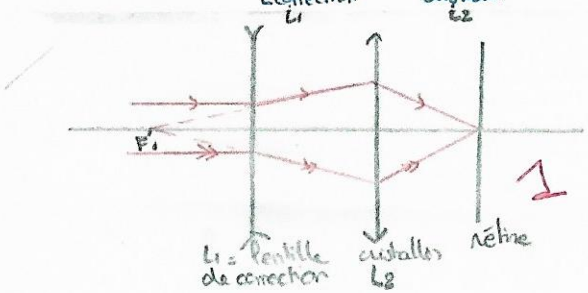
• Le point le plus proche que l'oeil peut voir en accommodant s'appelle le punctum proximum. 1

• Ce point étant situé à 25 cm en avant du cristallin, on calcule la vergence de l'oeil dans cette configuration en utilisant la relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V$ 2

avec O le centre de la lentille, A l'objet et A' l'image.

Soit : $\frac{1}{17.10^{-3}} - \frac{1}{-25.10^{-2}} = V_{max} \Rightarrow \underline{V_{max} \simeq 63\,\delta}$.

4. $A_\infty \xrightarrow[L_1]{\text{correction}} PR \xrightarrow[L_2]{\text{cristallin}}$ rétine



1

L'objet supposé à l'infini, l'image par L1 doit se faire au Punctum Remotum (PR) du cristallin (L2) (qui correspond au foyer focal image de L1). L'image finale se forme alors sur la rétine. 2

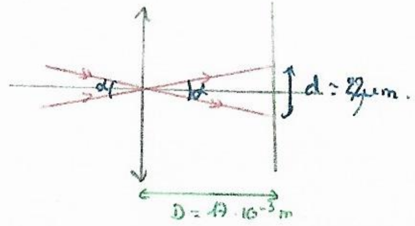
$A_\infty \xrightarrow{L_1} \underset{\substack{(-2m) \\ \text{de } L_2}}{F'_1} \xrightarrow{L_2}$ rétine = A'

En supposant les 2 lentilles L1 et L2 accolées :

$\frac{1}{\overline{OF'_1}} - \underbrace{\frac{1}{\overline{OA}}}_{\to 0} = V_1$ soit $V_1 \simeq -\frac{1}{2} = \underline{-0{,}5\,\delta} < 0$ (on a bien une lentille divergente).

5. $\sigma = 2.10^5$ cellules/mm² soit une distance d'environ $\sqrt{\frac{10^{-6}}{2.10^5}}$ ← surface ← nombre

2 $d \simeq 2{,}2.10^{-6}\,m = \underline{2{,}2\,\mu m}$.



On en déduit le pouvoir séparateur de l'oeil : $\alpha = \frac{d}{D} \simeq \frac{2{,}2.10^{-6}}{17.10^{-3}}$,

2 $\underline{\alpha = 1{,}3.10^{-4}\,rad}$

6. On peut prendre comme diamètre de la pupille 10% de la taille de l'oeil soit a = 2,5 mm.
On prend comme longueur d'onde $\lambda = 600$ nm (milieu du spectre visible).
L'ouverture angulaire du faisceau traversant la pupille de diamètre a vaut $2\varepsilon \simeq \frac{2\lambda}{a}$ soit ici : $2\varepsilon \simeq \frac{2.600.10^{-9}}{2{,}5.10^{-3}}$

$\alpha < 2\varepsilon$, ce n'est donc pas la diffraction qui détermine le pouvoir séparateur de l'oeil. $\underline{2\varepsilon = 4{,}8.10^{-4}\,rad}$

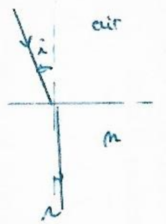
2

Problème 2 : Théorie géométrique de l'arc-en-ciel (CCINP_MP_2023)

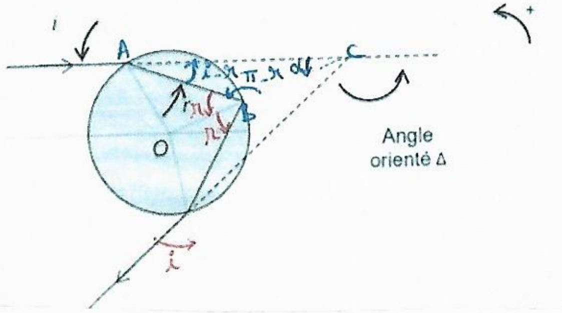
1. Lois de Snell-Descartes de la réfraction :

- le rayon réfracté est dans le plan d'incidence
- $n_{air} \sin i = n \sin r$ soit $\sin i = n \sin r$

2



2. En gardant l'orientation des angles on a les angles suivants :



$\Delta = \pi - 2\alpha$ (par symétrie* du problème)

triangle ABC :
$\alpha + \pi - r + i - r = \pi$
$\Rightarrow \alpha = 2r - i$

soit $\boxed{\Delta = \pi + 2i - 4r}$

2

* La symétrie du problème découle du principe du retour inverse de la lumière

$\Delta = \pi + 2i - 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$

$\boxed{\Delta = \pi + 2\arcsin x - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)}$

2

3. on cherche à annuler la dérivée de Δ par rapport à x : $\frac{d\Delta}{dx} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4/n}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2-x^2}} = 0$

3

soit $2\sqrt{n^2-x_m^2} = 4\sqrt{1-x_m^2} \Leftrightarrow \sqrt{n^2-x_m^2} = 2\sqrt{1-x_m^2}$

soit $n^2 - x_m^2 = 4 - 4x_m^2 \Rightarrow \boxed{x_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}$ $(x_m > 0)$

4. Autour de $i = 60°$, Δ est quasi constant $= 138°$. Tous les rayons déviés sont proches les uns des autres. Il y a donc accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$ (au minimum de déviation).

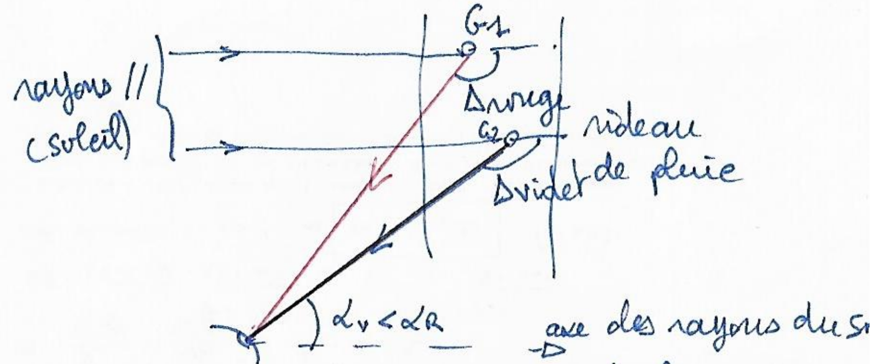
1

5. AN : Pour le cas de l'eau :

violet :	$x_m = 0{,}8566$	$\Delta_m = 139{,}3°$
rouge :	$x_m = 0{,}8624$	$\Delta_m = 137{,}5°$

4

6.



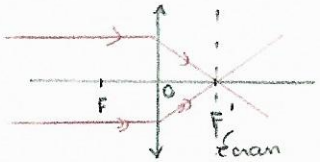
L'oeil reçoit { - le rayon rouge de la goutte G1
- " violet - - - - G2

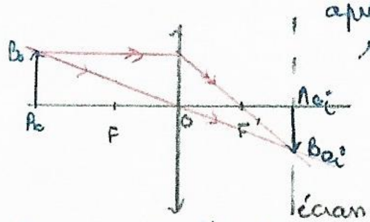
Les gouttes "violettes" sont moins inclinées pour l'œil ⇒ l'arc en ciel comporte du violet à l'intérieur

Problème 3 : Réglage d'un appareil photographique ENAC, 2023

1. Si on veut photographier des objets très éloignés, supposés à l'infini, leur image se formant dans le plan focal image de la lentille, l'écran doit se trouver dans le plan focal image de la lentille.
La vergence de la lentille valant $V = 10\,\delta$, la distance focale image vaut $f' = \frac{1}{V} = 0{,}1\,m$. L'écran doit donc être à 0,1 m derrière la lentille. 2

2. L'objet étant à 4,10 m en avant de la lentille, l'image se trouve après le plan focal image.





L'écran doit être déplacé vers la droite, et l'objet/image respecte la relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA_o}\cdot\overline{F'A_{oi}} = -f'^2$

Soit $\boxed{\overline{F'A_{oi}} = \frac{-f'^2}{\overline{FA_o}}}$ AN : $\overline{F'A_{oi}} = \frac{-0{,}1^2}{-4} = 2{,}5\cdot10^{-3}\,m = 2{,}5\,mm$.

L'écran est déplacé de 2,5 mm vers la droite. 3

3. $A_o \xrightarrow{L} A_{oi}$ Relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA_{oi}}} - \frac{1}{\overline{OA_o}} = V = \frac{1}{f'}$$ avec $\overline{OA_o} = -d_m$, $\overline{OA_{oi}} = 10{,}5\,cm$

Soit $\boxed{d_m = \frac{f'\cdot\overline{OA_{oi}}}{\overline{OA_{oi}} - f'}}$ AN : $d_m = 2{,}1\,m$ 3.

4. D'après la figure 4, en appliquant le théorème de Thalès dans les triangles A_iOK et A'_iOK (K étant le sommet supérieur de la lentille) 2

$\frac{\overline{A'_iA_i}}{\overline{A'_iO}} = \frac{D_t/2}{D_o/2}$ soit $\overline{A'_iA_i} = \frac{D_t}{D_o}\cdot\overline{A'_iO}$ or $\overline{A'_iO} = \overline{A'_iA_i} - \left(\frac{1}{V} + e\right)$

soit $\boxed{\overline{A_iA'_i} = \frac{D_t}{D_o - D_t}\left(\frac{1}{V} + e\right)}$

5. A'_o est l'objet qui, par L, donne A'_i donc d'après la relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'_i}} - \frac{1}{-d'_m} = V$

or, d'après le théorème de Thalès appliqué en Q4 : $\overline{OA'_i} = \frac{D_o}{D_t}\overline{A_iA'_i}$

donc $\frac{1}{d'_m} = V - \frac{1}{\frac{D_o}{D_t}\overline{A_iA'_i}} = V - \frac{D_t}{D_o\frac{D_t}{D_o - D_t}\left(\frac{1}{V}+e\right)} = V - \frac{(D_o - D_t)}{D_o\left(\frac{1}{V}+e\right)}$

$= \frac{D_t + eVD_o}{D_o\left(\frac{1}{V}+e\right)}$

Soit $\boxed{d'_m = \frac{D_o\left(\frac{1}{V}+e\right)}{D_t + eVD_o}}$ 2

6. $\frac{d'_m}{D_o} = \frac{\left(\frac{1}{V}+e\right)(D_t + eVD_o) - eV\left(D_o\left(\frac{1}{V}+e\right)\right)}{(D_t + eVD_o)^2}$ (Dérivée de d'_m par D_o).

En ne gardant le numérateur : $\frac{D_t}{V} + eD_t + \cancel{e^2VD_o} + \cancel{eD_o} - \cancel{eD_o} - \cancel{e^2VD_o}$ 2

$= \frac{D_t}{V} + eD_t > 0$

La dérivée étant positive, la fonction d'_m est croissante par rapport à D_o