Oscillateur harmonique

Ce qu'il faut connaître

- L'écriture mathématique d'un signal harmonique. Savoir nommer les paramètres, tracer l'allure du signal.
- La relation entre la pulsation et la fréquence, entre la pulsation et la période.
- L'équation de l'oscillateur harmonique, l'écriture de ses solutions.
- Savoir écrire la force exercée par un ressort et faire le schéma associé.
- L'énergie potentielle de pesanteur, d'un ressort, l'énergie cinétique d'une masse m
- L'énergie mécanique. Quelle propriété possède-t-elle si toutes les forces qui travaillent sont conservative ?

Ce qu'il faut savoir faire

- Mettre en équation le système masse-ressort horizontal et vertical, le circuit LC. Savoir changer d'origine en mécanique.
- Résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique, les CI étant données.
- Reconnaitre l'homogénéité d'une équation, d'un résultat.
- Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- Réaliser un bilan énergétique sur le système masse-ressort.

Méthode 1 : Solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

On considère l'équation

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\alpha \text{ avec } \alpha \text{ constante}$$

Méthode classique : On détermine

② la solution de l'équation homogène $\boxed{x_{\text{hom}}(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t}$ (forme à connaître par cœur), A et B constantes à déterminer. ① une solution particulière, constante ici, $x_{\text{part}}=\frac{\alpha}{\omega_0^2}$

③ D'où la solution générale $x_{\text{générale}}(t)=x_{\text{hom}}(t)+x_{\text{part}}(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t+\frac{\alpha}{\omega_0^2}$

④ On détermine A et B à l'aide des conditions initiales. Par exemple supposons que $\begin{cases} x(0)=x_0 & (\text{ CI } 1)\\ \dot{x}(0)=v_0 & (\text{ CI } 2)\end{cases}$

Méthode 2 : trouver les CI en électricité

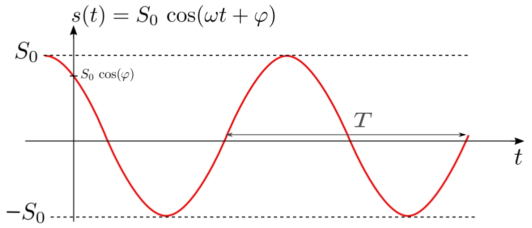
①Étudier le circuit à $t=0^-$ (donc à $t<0$, en général les générateurs sont éteints, le régime est permanent).
② En déduire $u_{\text{condensateur}}(0^-)$pour chaque condensateur et $i_{\text{bobine}}(0^-)$pour chaque bobine.
On en déduit $u_{\text{condensateur}}(0^+)$pour chaque condensateur et $i_{\text{bobine}}(0^+)$pour chaque bobine (ce sont les mêmes qu'à 0^-car $u_{\text{condensateur}}$ et i_{bobine} fonctions contines de t). Si besoin on en déduit les autres courants et tensions à 0^+avec la loi des mailles ou des nœuds.
• Si besoin des dérivées à 0^+, attention car elles n'ont pas de raison de valoir la même chose qu'à 0^- !
⇒ Solution : utiliser des relations comme $\frac{\mathrm{d}u_{\text{condensateur}}}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{i_{\text{condensateur}}(0^+)}{C}$ (avec $i_{\text{condensateur}}(0^+)$déterminé à l'étape précédente) ; ou $\frac{\mathrm{d}i_{\text{bobine}}}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{u_{\text{bobine}}(0^+)}{L}$ (avec $u_{\text{bobine}}(0^+)$déterminé à l'étape précédente).

I. Signal harmonique

Définition

Signal harmonique : signal s'écrivant comme

$$s(t)=S_0\cos(\omega t+\varphi).$$



Avec : - S_0 l'amplitude,
- ω la pulsation (radian par seconde, rad/s),
- φ la phase à l'origine (radian), donne la valeur initiale : $s(0)=S_0\cos(\varphi)$

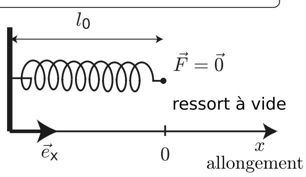
Liens entre période T, fréquence f et pulsation ω : $\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}\,;\, f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}}$

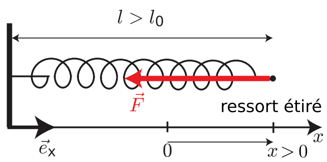
Démonstration : $\cos(\omega(t+2\pi/\omega)+\varphi)=\cos(\omega t+2\pi+\varphi)=\cos(\omega t+\varphi)$.

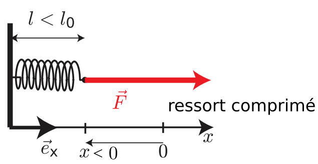
II. Le système masse-ressort décrit de façon idéale (sans frottements)

Modèle du ressort sans masse à spires non jointives

On note : $\begin{cases} \text{- Longueur à vide : } l_0. \\ \text{- Longueur totale : } l \\ \text{- Constante de raideur : } k \\ \text{- Allongement : } x = l - l_0. \end{cases}$





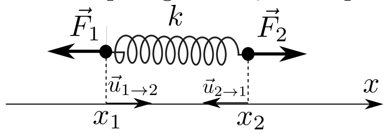


La force exercée sur un point M accroché à l'extrémité est proportionnelle à l'allongement $x = l - l_0$ du ressort :

$$\boxed{\vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}_{\text{ext}} = -k\,x\,\vec{u}_{\text{ext}}}$$

avec $\vec{u}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire dirigé du point d'attache vers la masse M

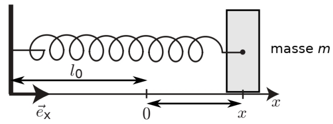
• Autre formulation plus générale, moins pratique mais toujours vraie, utile si tout bouge (attention aux vecteurs unitaires !) :



Le ressort exerce sur les deux points 1 et 2 les forces

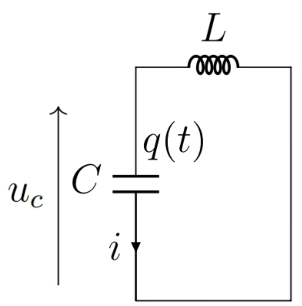
$$\boxed{\begin{cases} \vec{F}_1 = k(x_1 - x_2)\vec{u}_{1\to2} \\ \vec{F}_2 = k(x_2 - x_1)\vec{u}_{2\to1} \end{cases} \quad ; \text{ et } \vec{F}_2 = -\vec{F}_1}$$

1. Étude du mouvement dans le cas du système masse-ressort



On considère le système ci-contre. On néglige tout frottement et on se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen.
On se donne des conditions initiales : à $t = 0, x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.
1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le PFD, en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$. L'écrire sous forme canonique.
2 - Résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la solution $x(t)$. On déterminera les constantes d'intégration.
3 - Alternative : Reprendre cette question en supposant cette fois que à $t = 0, x(0) = x_0 > 0$ et $v(0) = 0$.
4 - Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort et de l'énergie cinétique d'un point (souvenirs de terminale, admises pour l'instant). Donner alors l'expression de l'énergie mécanique du système {masse et ressort} en fonction de $x(t)$, de $\dot{x}(t)$ et d'autres paramètres.
5 - Dériver par rapport au temps cette expression et montrer que l'énergie mécanique est bien conservée.
6 - Qu'est ce qui permettait de prédire cette conservation sans faire aucun calcul ?

2. Circuit LC



On considère le circuit LC ci-contre. On s'intéresse à la charge $q(t)$ portée par l'armature du condensateur. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert et la charge portée par le condensateur est Q_0. $t = 0$ on ferme le circuit, qui devient alors celui représenté ci-contre. On prendra $L = 1.0$mH et $C = 4.0$ nF.
1 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la charge $q(t)$.
2 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la tension u_C aux bornes du condensateur.
3 - La résoudre.
4 - Tracer l'allure de la solution. Quelle est la période des oscillations ? Faire l'application numérique.
5 - Montrer que l'énergie totale stockée dans le circuit est constante au cours du temps.

III. Homogénéité en électricité - Constantes de temps - pulsations

Volt, Farad, Ohm, Henry ne sont pas des unités fondamentales, mais revenir en m, kg, s, A n'est le plus souvent pas du tout une bonne idée. Il faut prendre comme grandeurs de base i, u et t et jongler avec les relations $u = ri; u = L\dfrac{di}{dt}; i = C\dfrac{du}{dt}$

- Exemples : $[R] = [u/i]$; $[L] = \left[\dfrac{u\,di}{dt}\right] = \left[\dfrac{ui}{t}\right]$; $[C] =$

- (re)connaitre les classiques : $\boxed{[RC] = \qquad ; \left[\dfrac{L}{R}\right] = \qquad ; [LC] = \qquad ; \left[R\sqrt{\dfrac{C}{L}}\right] = \qquad}$