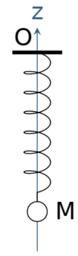
TD Oscillateur harmonique

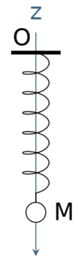
1 Forces du ressort

Indiquer l'expression de la force de rappel du ressort dans ces différentes situations, en fonction de des caractéristiques k et l_0 du ressort, de la position x ou z du point M (repérée par rapport à l'origine en O), si nécessaire de la coordonnée x_H du point H, et de $\vec{e}_x$ ou $\vec{e}_z$. On passera éventuellement par l'expression avec $\vec{u}_{\text{ext}}$.

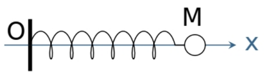
4 -



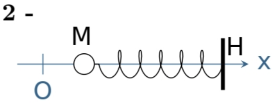
5 -



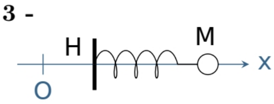
1 -



2 -



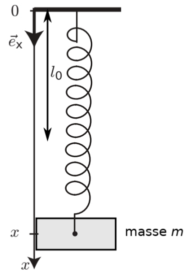
3 -



Rép : 1 : $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{e}_x$;2 : $\vec{F} = k(x - l_0)\vec{e}_x$; 3 : $\vec{F} = -k(x - x_H - l_0)\vec{e}_x$; 4 :$\vec{F} = k(z - l_0)\vec{e}_z$; 5 : $\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$;

2 Système masse-ressort vertical

On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le tout est vertical. On négligera tout frottement.

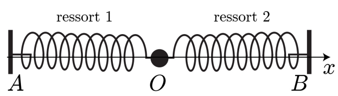


1 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la position $x(t)$.
2 - Quelle est l'expression de la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$?
3 - Réécrire l'équation en faisant d'abord intervenir $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $x_{\text{éq}}$ seulement (et x et $\ddot{x}$ évidemment), puis la nouvelle variable $u = x - x_{\text{éq}}$.
4 - La résoudre. On considèrera qu'à l'instant initial la masse est en $x = x_{\text{éq}} + \delta$ avec δ une longueur, et on lache la masse de cette position sans vitesse initiale.
5 - Tracer l'allure de la solution. Quelle est la période des oscillations ?
6 - Donner l'expression de l'énergie totale du système, en fonction notamment de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$. Utiliser le fait qu'elle est constante pour retrouver l'équation du mouvement.

Rép : $\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - l_0) = g; x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}; \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; u = \delta \cos \omega_0 t; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

3 Système à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox . Ce mobile est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B.



Les deux ressorts sont identiques (constante de raideur k, longueur à vide l_0). On néglige tout frottement et le référentiel d'étude est galiléen. Dans la position d'équilibre, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{\text{éq}}$, et le mobile est en O d'abscisse $x = 0$. À l'instant initial, le mobile est abandonné sans vitesse d'une position x_0.
1 - Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.
2 - Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0.
3 - Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4 - Donner les expressions de l'énergie potentielle élastique des deux ressorts, de l'énergie cinétique du mobile, et de l'énergie mécanique totale $E_m(t)$ en fonction de k, x_0, ω_0, t et éventuellement l_0 et $l_{\text{éq}}$. Par convention l'origine de l'énergie potentielle correspondra à la position d'équilibre : $E_p = 0$ pour $x = 0$.

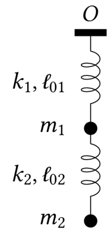
Rép : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}; x = x_0 \cos \omega_0 t; E_m = k x_0^2$

4 Vibration d'une molécule de HCl

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est mesurée par spectroscopie comme valant $f = 8,5 \times 10^{13}$ Hz. On aborde dans cet exercice un premier modèle simple de la molécule, décrite comme un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe. L'interaction entre les deux atomes est modélisée par un pseudo-ressort de raideur k.
Données : masses molaires $M_{\text{H}} = 1,0$ g mol^{-1} et $M_{\text{Cl}} = 35,5$ g mol^{-1}, constante d'Avogadro $N_A = 6,0 \times 10^{23}$ mol^{-1}.
1 - Pourquoi est-il raisonnable de supposer l'atome de chlore fixe ?
2 - Calculer la raideur k.
3 - On admet (mécanique quantique) que l'énergie de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J s est la constante de Planck. La référence de l'énergie potentielle est prise nulle lorsque le ressort est à l'équilibre immobile. Calculer la vitesse maximale de l'atome d'hydrogène.
4 - Calculer l'amplitude de son mouvement. Comparer à la longueur $d = 127$pm tabulée de la liaison H $-$ Cl.

Rép : $k = 4\pi^2 f^2 \dfrac{M_H}{N_A}; v_{max} = \sqrt{\frac{hfN_A}{M_H}}; x_{max} = \sqrt{\frac{hf}{k}} \ll d$

$\boxed{5}$ Masses et ressorts à la verticale (Oral CCP)



1 - On considère le système ci-contre où k_i et ℓ_{0i} sont les raideurs et longueurs à vide des ressorts. Déterminer les allongements $\Delta\ell_1$ et $\Delta\ell_2$ à l'équilibre.
2 - Établir les équations différentielles vérifiées par les écarts z_1 et z_2 aux positions d'équilibre.
3 - La masse m_2 est maintenant supposée maintenue dans sa position d'équilibre. La masse m_1 est alors déplacée de Z_0 de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale. Trouver l'équation $z_1(t)$ régissant le mouvement de m_1.

Rép : $\Delta\ell_{1,\acute{e}q} = \frac{(m_1+m_2)g}{k_1}; \Delta\ell_{2,\dot{e}q} = \frac{m_2 g}{k_2}; \frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1} z_1 = \frac{k_2}{m_1} z_2; \frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_2}{m_2} z_2 = \frac{k_2}{m_2} z_1; z_1(t) = Z_0 \cos(\omega_0 t)$