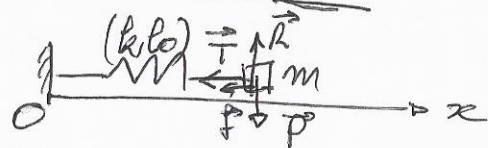


Oscillateur horizontal



PFD appliqué à m dans RTSG

• $\vec{P} + \vec{R} = 0$ (pas de mot vertical)

• en proj sur Ox

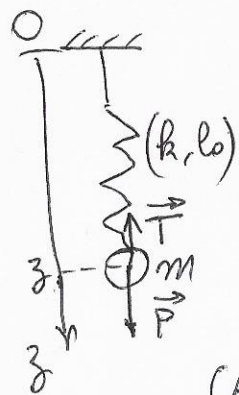
Origine en O: $m \ddot{x} = -k(x - l_0) - \lambda \dot{x}$ $m \ddot{x} = F_{\text{ressort}} + F_{\text{frott}}$

on pose $u = x - l_0$ (position d'éq en $x_{eq} = l_0$)

Alors, comme $\dot{u} = \dot{x}$, on a:

$$\ddot{u} + \frac{\lambda}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u = 0$$

Oscillateur vertical



PFD appliqué à m dans RTSG, en proj sur Oz descendant:

$$m \ddot{z} = -k(l - l_0) + mg + \lambda \dot{z} \quad \text{Astuce!}$$

$$m \ddot{z} = -k(z - (l_0 + \frac{mg}{k})) - \lambda \dot{z}$$

z_{eq} apparaît!

(A l'équilibre, $\ddot{z}_{eq} = 0 \Rightarrow z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$)

On pose $u = z - z_{eq} \Rightarrow m \ddot{u} = -k u - \lambda \dot{u}$

$$\Leftrightarrow \ddot{u} + \frac{\lambda}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u = 0$$

$$\boxed{\text{Résolution de } \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

① Equation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

discriminant $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) \Rightarrow \Delta = 0 \text{ si } Q = \frac{1}{2}$
 $= \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$

Cas 1: $Q > \frac{1}{2}$ alors $\Delta < 0$, et les racines de l'eq caract

sont $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2} \sqrt{-\Delta} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$

On pose $\boxed{Q = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ (pseudo période)

Alors les solutions générales sont du type

$$x = \underbrace{(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)}_{\text{oscillations}} \underbrace{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}_{\text{amortissement, temps caractéristique}}$$

$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} (> \frac{1}{\omega_0} \text{ car } Q > \frac{1}{2})$

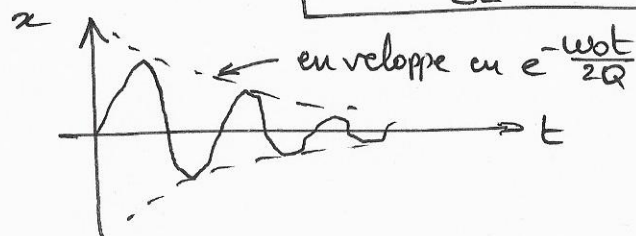
Application des CI:

• $x(0) \stackrel{CI}{=} 0 \stackrel{SG}{=} A$

• Alors $\dot{x} = B\Omega \cos \Omega t e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} - \frac{\omega_0}{2Q} B \sin \Omega t e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$

donc $\dot{x}(0) \stackrel{CI}{=} \dot{x}_0 \stackrel{SG}{=} B\Omega$

Finalement: $x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \sin \Omega t e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$



Cas 2: $Q = \frac{1}{2}$ Alors $\Delta = 0$, $r_1 = r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$

les solutions sont $x = (At + B) e^{-\omega_0 t}$ $\rightarrow$ amortissement, temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

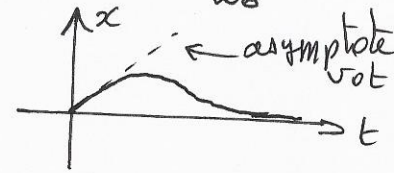
Application des CI

• $x(0) \stackrel{CI}{=} 0 \stackrel{SG}{=} B$

• $\dot{x}(t) = A e^{-\omega_0 t} - \omega_0 A t e^{-\omega_0 t}$

donc $\dot{x}(0) \stackrel{CI}{=} \dot{x}_0 \stackrel{SG}{=} A$

Finalement: $x(t) = \dot{x}_0 t e^{-\omega_0 t}$



Cas 3: $Q < \frac{1}{2}$ Alors $\Delta > 0$

$$\begin{cases} r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0 \end{cases}$$

On a $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} = \frac{\omega_0}{2Q} (\sqrt{1 - 4Q^2} - 1) < 0$

les 2 racines sont négatives, et $r_2 < r_1 < 0$

Solutions générales du type $x = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$

Application des CI:

• $x(0) \stackrel{CI}{=} 0 \stackrel{SG}{=} A + B$

• $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \stackrel{SG}{=} -r_1 A - r_2 B$

$\Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B(r_1 - r_2) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{\dot{x}_0}{r_2 - r_1}$

Séparons les 2 graphes:

