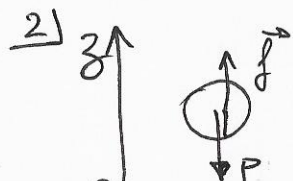


Tombe la pluie

A) 1) Pousée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_a V_g \vec{g}$, avec $V_g = \frac{4}{3} \pi R^3$ volume de la goutte.

D'où le rapport $\frac{\pi}{P} = \frac{\rho_a V_g g}{\rho_e V_g g} = \frac{\rho_a}{\rho_e} \frac{AN}{AN} 10^{-3}$

⇒ on peut négliger π devant P .

2)  2^e LN appliquée à la goutte en prog/Oz:

$$m \dot{z} = mg - 6 \pi \eta R \dot{z}, \text{ soit}$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_e \dot{v} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_e g - 6 \pi \eta R v$$

$$\Leftrightarrow \dot{v} + \frac{g}{2} \frac{\eta}{R^2 \rho_e} v = g \quad (1)$$

3) On a donc $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = g$, avec $\tau = \frac{2 R^2 \rho_e}{9 \eta}$

η est en Pa.s, or $1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$
donc η en $\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$

d'où $[\tau] = \frac{\text{m}^2 \text{ kg m}^{-3}}{\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}} = \text{s}$.

4) (1) a pour SH: $v = A e^{-t/\tau}$
SP: $v = g \tau$ } SG: $v = g \tau + A e^{-t/\tau}$

A $t=0$, $v \stackrel{CI}{=} 0 \stackrel{SG}{=} A + g \tau \Rightarrow A = -g \tau$.

Donc $v(t) = g \tau (1 - e^{-t/\tau})$

or $v = \frac{dz}{dt} \xRightarrow{\text{intégrat}^o} z = g \tau t + g \tau^2 e^{-t/\tau} + \text{cte}$

or à $t=0$, $z \stackrel{\text{énoncé}}{=} 0 = g \tau^2 + \text{cte} \Rightarrow \text{cte} = -g \tau^2$

D'où $z(t) = g \tau t + g \tau^2 (e^{-t/\tau} - 1)$

5) vitesse limite $\Rightarrow \dot{v} = 0 \Rightarrow v_{\text{lim}} = g \tau$

AN: $v_{\text{lim}} = \frac{9,8 \times 2 \times (0,2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^3}{9 \times 2 \cdot 10^{-5}} = 4,3 \text{ m s}^{-1}$

le temps caractéristique est $\tau = \frac{v_{\text{lim}}}{g} \approx 0,4 \text{ s}$.

⇒ En 5 s, la goutte est à v_{lim} ! ⇒ on peut dire que tout son trajet se fait à v_{lim} , alors le temps de chute est

$T = \frac{H}{v_{\text{lim}}} \frac{AN}{AN} \frac{1000}{4,3} = 230 \text{ s}$.

B) 6) Comme $\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{4}{3} \pi r^3 \\ S = 4 \pi r^2 \end{array} \right.$ pour 1 sphère de rayon r ,

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} S$ se réécrit $\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{1}{2} (4 \pi r^2)$

soit $4 \pi r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} 4 \pi r^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4}$

⇒ Par intégration, $r = r_0 + \frac{1}{4} t$

7] La RFD est donc $\frac{d(mv)}{dt} = mg - f_v$, soit

$$\frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} = mg - f_v, \text{ on envoie}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} + \frac{f_v}{m} = g$$

• on a $m = \rho_e V \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho_e \frac{dV}{dt} \stackrel{\text{enoncé}}{=} k S = 4\pi r^2 k$
 comme $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_e$, on a $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{3k}{r}$

• on a déjà obtenu $\frac{f_v}{m} = \frac{g \eta}{2 r^2 \rho_e} v$

on obtient la forme demandée avec

$$\boxed{A = 3k} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{g \eta}{2 \rho_e}}$$

8] l'équation est donc $\frac{dv}{dt} + \frac{A}{r_0 + kt} v = g - (1)$

On remplace avec v_p proposée $v_p = at + b$

$$(1) \Rightarrow a + \frac{A(at+b)}{r_0 + kt} = g \Leftrightarrow (g-a)(r_0 + kt) = A(at+b)$$

les termes en t doivent être égaux : $\begin{cases} Aa = k(g-a) & (2) \\ Ab = (g-a)r_0 & (3) \end{cases}$

$$(2) \Rightarrow a(A+k) = kg \Rightarrow \boxed{a = \frac{kg}{A+k} = \frac{g}{4}}$$

$$\frac{(3)}{(2)} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{r_0}{k} \Rightarrow \boxed{b = \frac{r_0 g}{A+k} = \frac{r_0 g}{4k}}$$

Alors v_p est bien solution particulière

9] Equation homogène : $\frac{dv}{dt} + \frac{A}{r_0 + kt} v = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{v} = - \frac{A dt}{r_0 + kt} \quad (\text{on sépare les variables})$$

Puis on intègre séparément : $\int_{v(0)}^v \frac{dv}{v} = - \int_0^t \frac{A dt}{r_0 + kt}$
 $\ln \frac{v}{K} = - \frac{A}{k} \ln \left(\frac{r_0 + kt}{r_0} \right)$

Soit $v_H = K \left(\frac{r_0 + kt}{r_0} \right)^{-A/k} \Leftrightarrow v_H = K \left(1 + \frac{kt}{r_0} \right)^{-A/k}$

10] La solution générale est donc

$$v_g = K \left(1 + \frac{kt}{r_0} \right)^{-A/k} + at + b$$

or à $t=0$, $v = 0 \stackrel{\text{SI}}{=} K + b \Rightarrow K = -b$

Finalement $\boxed{v = at + b \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{kt}{r_0} \right)^{A/k}} \right)}$