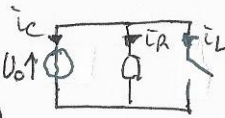


TD Oscillateur amorti

Circuit RC parallèle

1) A $t=0^+$, schéma équivalent: $U_0 \uparrow$
(cond chargé sous U_0 !)



$\Rightarrow$ Amortissement:

$$i_C = -i_R = -\frac{U_0}{R}$$

$$i_L = 0$$

2) Loi des nœuds: $i_C + i_R + i_L = 0 \Leftrightarrow \frac{U_C}{R} + C \frac{dU_C}{dt} + \int \frac{U_C}{L} dt = 0$

Il faut dériver: $\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0}$

avec $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$

Rq: 1) $Q \uparrow$ avec R : Si $R \rightarrow \infty$, on retrouve 1 circuit LC v.

2) Q ne vaut pas toujours $\frac{1}{R\sqrt{\frac{L}{C}}}$!!

3) Casus: régime critique $\Leftrightarrow Q = \frac{1}{2} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = 250 \Omega$

4) Alors $U_C(t) = (At+B)e^{-\gamma t}$, avec γ racine double de l'eq caractéristique $\gamma^2 + \frac{\omega_0}{Q} \gamma + \omega_0^2 = 0$ ($Q = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = -\omega_0$)

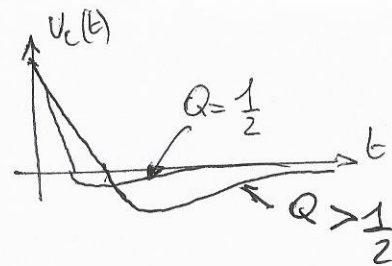
A $t=0^+$: $\begin{cases} U_C(0^+) \stackrel{SG}{=} U_0 \\ \frac{dU_C}{dt}(0^+) = \frac{i_C}{C} = -\frac{U_0}{RC} \stackrel{SG}{=} A - \omega_0 B \end{cases}$ (car $\frac{dU_C}{dt} = A e^{-\gamma t} - \gamma (At+B) e^{-\gamma t}$)

Donc $\boxed{B = U_0}$, $\boxed{A = \omega_0 U_0 - \frac{U_0}{RC} = U_0 \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{RC} \right)}$

Finalement $\boxed{U_C(t) = U_0 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{RC} \right) t + 1 \right] e^{-\omega_0 t}}$

5) Casus: Δ de l'eq caractéristique: $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

$\Rightarrow \gamma_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$, et $U_C(t) = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t}$

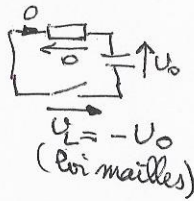


RLC série en régime libre

1) Continuité à $t=0$ de $\begin{cases} U_C \Rightarrow U_C(0^+) = U_0 \\ i_L \Rightarrow i(0^+) = 0 \end{cases}$

Loi des mailles $\Rightarrow U_C(0^+) = -U_0$

$t=0^+$:



à $t \rightarrow \infty$: $\begin{cases} i=0 \Rightarrow U_C=0 \\ \text{bobine} \Leftrightarrow \text{fil} \Rightarrow U_L=0 \end{cases}$

2) $y(0) = 0 \Rightarrow y$ est l'intensité, on la mesure grâce à R:



3) Loi des mailles: $Ri + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \xrightarrow{\text{dérivée}} i + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC} i = 0$

Soit $i'' + 2m\omega_0 i' + \omega_0^2 i = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $2m\omega_0 = \frac{R}{L} \Rightarrow m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$

4) Polynôme caract: $r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1) < 0$
(enoncé) $\Rightarrow r_{1/2} = -m\omega_0 \pm i\omega_0 \sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm i\Omega$
(Ω est la pseudo pulsation) $\boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{1-m^2}}$

Alors (1) a pour SG $i = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-m\omega_0 t}$

les CI sont $\begin{cases} i(0^+) = 0 \\ U_L(0^+) = L \frac{di}{dt}(0^+) = -U_0 \end{cases}$

Donc avec la SG: $\begin{cases} i(0^+) = A = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = B\Omega = -\frac{U_0}{L} \Rightarrow B = -\frac{U_0}{L\Omega} \end{cases}$

Finalement, $\boxed{i = -\frac{U_0}{L\Omega} \sin(\Omega t) e^{-m\omega_0 t}}$

d' $\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}}$ $t_2 - t_1 = T'$: pseudopériode

classique! t_1 et t_2 sont 2 maxima du sinus: $t_2 = t_1 + T' = t_1 + \frac{2\pi}{\Omega}$
l'amortissement est faible, donc $m \ll 1$, $\Omega \approx \omega_0$.
alors $\boxed{\frac{y_2}{y_1} = e^{-m\omega_0 T'} \approx e^{-2\pi m}}$

RLC non série

1) la loi des nœuds donne

$i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \quad (1)$

• Loi mailles: $u + L \frac{di}{dt} = E \quad (2) \Rightarrow u = E - L \frac{di}{dt}$. En reportant dans (1):

$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2 i}{dt^2} \Leftrightarrow i'' + \frac{\omega_0}{Q} i' + \omega_0^2 i = \frac{E}{RLC}$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}}$

2) $t \leq 0^-$: $\begin{cases} 0 \uparrow \downarrow \end{cases} \Rightarrow i=0 \text{ à } t=0^- \xRightarrow{\text{bobine}} i(0^+) = 0$

$t=0^+$: $\begin{cases} E \uparrow \downarrow \end{cases} \Rightarrow U_L(0^+) = L \frac{di}{dt}(0^+) = E \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}}$

3) Si $Q=2$, l'équation caract est $r^2 + \frac{\omega_0}{2} r + \omega_0^2 = 0$
 $\Rightarrow \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4} \omega_0^2 < 0$, $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm i \frac{\omega_0 \sqrt{15}}{4}$

$\Rightarrow i = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\lambda t}$ (notation) $\left. \begin{matrix} \lambda = \frac{\omega_0}{4} \\ \Omega = \frac{\omega_0 \sqrt{15}}{4} \end{matrix} \right\}$
est la SG de l'équation homogène.

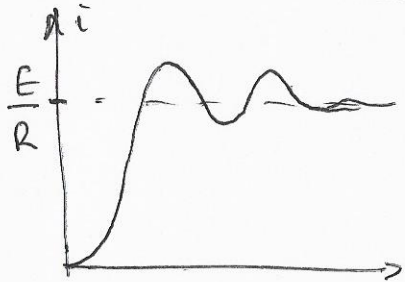
• SP: $\bar{i}_p = \frac{E}{R} \Rightarrow SG = \frac{E}{R} + (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\lambda t}$

CI: $i(0^+) = 0$ par continuité $\Rightarrow A = -\frac{E}{R}$

$\frac{di}{dt} = -\Omega [-A \sin \Omega t + B \cos \Omega t] e^{-\lambda t} - \lambda [A \cos \Omega t + B \sin \Omega t] e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) \stackrel{?}{=} B\Omega - \lambda A \stackrel{CL}{=} \frac{E}{L} \Rightarrow B = \frac{E}{\Omega} \left(\frac{1}{L} - \frac{\lambda}{R} \right)$

$$i = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \Omega t + \frac{R}{\Omega} \left(\frac{1}{L} - \frac{\lambda}{R} \right) \sin \Omega t \right) \right]$$



- ← $Au^u p e^{p t}$, avec
- $i(0) = 0$
 - $\frac{di}{dt}(0^+) > 0$
 - pas trop d'oscillations ($Q=2$)
 - $i(\infty) = \frac{E}{R}$ (circuit équivalent)

Analyse de relevé expérimental

- On observe des oscillations, faiblement amorties ($Q \approx n$ de d'oscillations visibles) (à retenir ...) $\Rightarrow Q \approx 10$ d'RLC.

- Cours $\rightarrow i(t) = [A \cos \omega t + B \sin \omega t] e^{-\lambda t}$ avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} ; \quad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

Hypothèse : $Q \gg 1 \Rightarrow \omega \approx \omega_0 \approx \frac{2\pi}{T_{\text{signal}}} \frac{AN}{Q} \frac{2\pi}{12\text{ms}} = 510^4 \text{ rad/s}$

En 4 oscillations, le signal est divisé par 2. Soit

$$i(t+4T_{\text{sig}}) = \frac{i(t)}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda \times 4T_{\text{sig}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\lambda T = \ln 2, \text{ soit}$$

$$\frac{4\omega_0 T_{\text{sig}}}{2Q} = \ln 2 \Leftrightarrow \underline{Q} = \frac{2\omega_0 T_{\text{sig}}}{\ln 2} \frac{AN}{Q} \frac{2510^4 \times 0,1210^{-3}}{\ln 2} = 17$$

On revient aux valeurs des composants par l'eq diff: (hyp. vérifiée)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + LC = 0, \text{ donc } \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \underline{L} = \frac{QR}{\omega_0} \frac{AN}{Q} \frac{17 \times 50}{510^4} \approx \underline{17 \text{ mH}}$$

$$\text{Alors } \underline{C} = \frac{1}{L\omega_0^2} \frac{AN}{Q} \frac{1}{1710^{-3}(510^4)^2} = \underline{2,3 \cdot 10^{-8} \text{ F}}$$