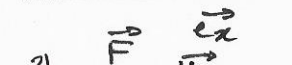
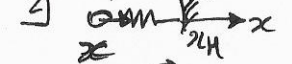
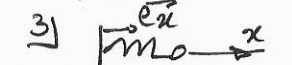
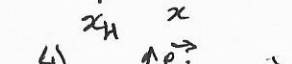
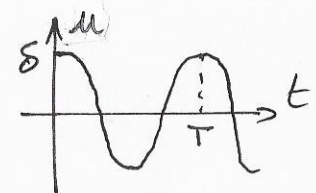


TD Oscillateur Harmonique

Forces du ressort

- 1)  $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{e}_x$ ($l_0 = x_H$) *longueur ressort (>0) toujours*
 - 2)  $\vec{F} = k(x_H - x - l_0)\vec{e}_x$ ($F_x > 0$ si $x \rightarrow -\infty$)
 - 3)  $\vec{F} = -k(x - x_H - l_0)\vec{e}_x$ ($F_x < 0$ si $x \rightarrow \infty$)
 - 4)  $\vec{F} = k(-z - l_0)\vec{e}_z$ ($F_z > 0$ si $z \rightarrow \infty$)
- Δ ici $l_0 = -z$ (car $z < 0$) $\Rightarrow \vec{F} = k(-z - l_0)\vec{e}_z$ ($F_z > 0$ si $z \rightarrow \infty$)
- $\Rightarrow \vec{F} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$ (idem cours)

5)



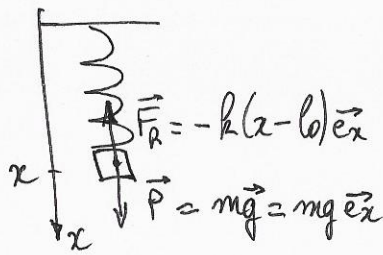
on a $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

6)

$E_p = E_{p_{ressort}} + E_{p_{pesanteur}} = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 - mgx$
 (origine des E_p en $x=0$, les E_{pp} quand $x \neq 0$)
 $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ *important à comprendre!*

D'où l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 - mgx$
 Pas de forces non conservatives $\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$
 soit $0 = m\ddot{x} + k\dot{x}(x - l_0) - mg\dot{x}$ (équation (1) retrouvée)

Masses Ressort Vertical



1) PFD appliqué à m dans RTSQ, en $\left[\begin{matrix} \text{pot. sur } \vec{e}_x \\ m\ddot{x} = -k(x - l_0) + mg \end{matrix} \right]$ *A restituer dans les exo!*

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - l_0) = g$ (1)

2) A l'équilibre $\ddot{x} = 0$
 donc $x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} > 0$ (ouf!)

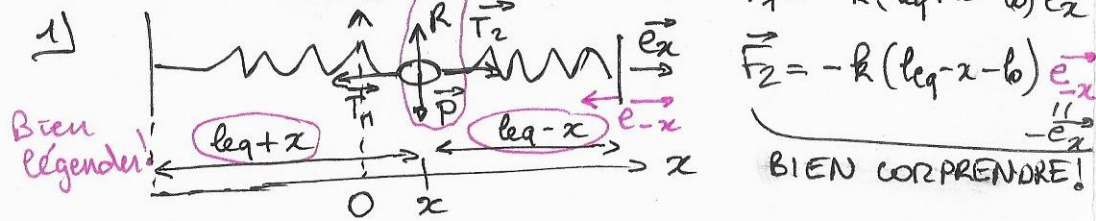
3) (1) se réécrit $\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - \underbrace{l_0 + \frac{mg}{k}}_{x_{eq}}) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0$

Soit avec $u = x - x_{eq}$
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 $\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \Leftrightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ (2)

Vérif $\left\{ \begin{matrix} u=0 \text{ position d'équilibre} \Rightarrow \text{ouf!} \\ \Delta \text{ signe } \oplus \Rightarrow \text{OK} \end{matrix} \right.$

4) (2) a pour sol gale $u = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$
 À $t=0$ $\left\{ \begin{matrix} u \stackrel{SC}{=} A \stackrel{CF}{=} \delta \\ \dot{u} \stackrel{SC}{=} B\omega_0 \stackrel{CF}{=} 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow u = \delta \cos \omega_0 t$

Système à 2 ressorts



PFD appliqué à m dans RTSG en proj sur Ox:

$$m\ddot{x} = -k(l_{eq} + x - l_0) + k(l_{eq} - x - l_0)$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} = -2kx \quad (1)$$

2) (1) $\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (2): oscill harm avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$,
et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

3) (2) a pour sol gale $x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

À $t=0$ $\left\{ \begin{array}{l} x \stackrel{SG}{=} A \stackrel{CI}{=} x_0 \\ \dot{x} \stackrel{SG}{=} \omega_0 B \stackrel{CI}{=} 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = x_0 \cos \omega_0 t$

4) • $E_{p_{\text{ressorts}}} = 0$ (origine sur l'axe des x)

• $E_{p_{\text{ressorts}}} = \frac{1}{2}k((x + (l_{eq} - l_0))^2 + ((l_{eq} - l_0) - x)^2) + K$
 $= \frac{1}{2}k[x^2 + 2x(l_{eq} - l_0) + (l_{eq} - l_0)^2 + x^2 - 2x(l_{eq} - l_0) + (l_{eq} - l_0)^2] + K$
 $= \frac{1}{2}k[2x^2 + 2(l_{eq} - l_0)^2] + K$
 $= kx^2$

laisser groupé

assure $E_p = 0$ pour $x=0$ (LE)

Où $E_m = kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = kx^2 + \frac{1}{2}m(x_0\omega_0 \sin \omega_0 t)^2$

$\Leftrightarrow E_m = kx^2 + \frac{1}{2}m x_0^2 \left(\frac{2k}{m}\right) \sin^2 \omega_0 t$

$E_m = kx_0^2 [\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t] = kx_0^2 = \omega_0^2 \text{ (ouf!)}$

Vibration H-Cl

1) Cl beaucoup plus massif que H $\rightarrow$ ne bouge pas

2) Cours: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_H}} \Rightarrow k = 4\pi^2 f^2 m_H$

$$k = 4\pi^2 f^2 \frac{m_H}{M_A}$$

AN: $k = \frac{4 \times 9 \times 9 \times 10^{26} \times 10^{-3}}{6 \times 10^{23}} \approx \frac{4000}{6} \approx 150 \text{ Nm}^{-1}$
 (sans calcul!)

3) $E_m = \text{cte}$ car oscill harmonique $= E_c + E_p$.

Donc quand $E_p = 0$, $E_{c_{\text{max}}} = E_m$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}k f \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{k f}{m}} = \sqrt{\frac{k f M_A}{m_H}}$

AN: $v_{\text{max}} \approx \sqrt{\frac{6 \times 10^{-34} \times 8 \times 10^{13} \times 6 \times 10^{23}}{10^{-3}}} \approx \sqrt{3 \times 10^7} \approx 1,7 \times 3 \times 10^3 \approx 5 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$

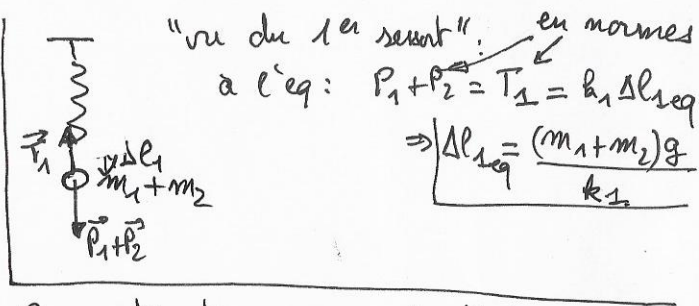
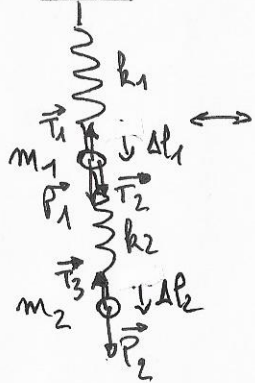
4) Quand $E_c = 0$, $E_{p_{\text{max}}} = E_m$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2}k f \Rightarrow x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{k f}{k}}$

AN: $x_{\text{max}} \approx \sqrt{\frac{6 \times 10^{-34} \times 8 \times 10^{13}}{150}} \approx \sqrt{\frac{10^{-21}}{3}} \approx \frac{3}{1,7} \times 10^{-11} \approx 2 \times 10^{-11} \text{ m}$
 $x_{\text{max}} \approx 20 \text{ pm} \ll d$

Planes et ressorts à la verticale

1) A l'équilibre:



"vu du 1^{er} ressort": en normes
à l'éq: $P_1 + P_2 = T_1 = k_1 \Delta l_{1eq}$
 $\Rightarrow \Delta l_{1eq} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1}$

On peut retrouver ce résultat sans simplifier le schéma, en écrivant l'équilibre des 2 masses:

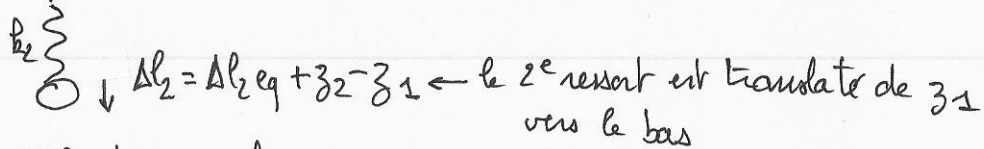
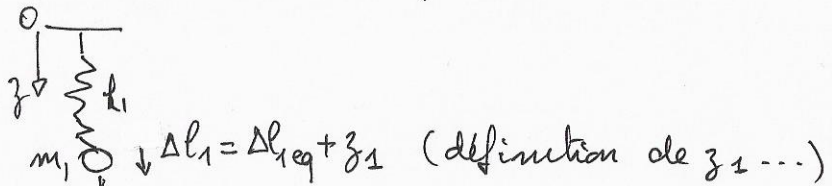
pour m_1 : en normes: $T_1 = P_1 + T_2$

m_2 : $T_3 = P_2 \Rightarrow \Delta l_{2eq} = \frac{m_2 g}{k_2}$

or le ressort exerce la même force à ses 2 extrémités $T_3 = T_2$

Donc $T_1 = P_1 + P_2$.

2) Nouveau dessin hors équilibre:



le PFD donne alors en posant O_z

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2$$

$$= m_1 g - k_1 (\Delta l_{1eq} + z_1) + k_2 (\Delta l_{2eq} + z_2 - z_1)$$

on remplace les Δl_{ieq} par leur valeurs

$$= m_1 g - (m_1 + m_2)g - k_1 z_1 + m_2 g + k_2 (z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{z}_1 = -(k_1 + k_2)z_1 + k_2 z_2 \quad (1) \quad \leftarrow \text{on vérifie que si } z_1 = z_2 = 0 \text{ le système est bien à l'équilibre! ouf!}$$

Pour m_2 ; de même

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - k_2 (\Delta l_{2eq} + z_2 - z_1)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -k_2 z_2 + k_2 z_1 \quad (\text{idem} \dots)$$

3) Alors $z_2 = 0$ (1) devient $\ddot{z}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} z_1 = 0$

ou ω de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}$

SG: $z_1 = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

CI: $\begin{cases} z_1(0) \stackrel{SG}{=} A \stackrel{CI}{=} Z_0 \\ \dot{z}_1(0) \stackrel{SG}{=} \omega_0 B \stackrel{CI}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z_1 = Z_0 \cos \omega_0 t}$