Méthodes sur un exemple : mise en équation, conditions initiales

I. Mise en équation

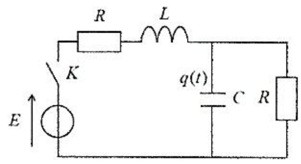
C'est une évidence, si vous n'avez pas la bonne équation , tout sera faux...
Mais d'expérience, c'est très souvent le cas ! Je vois plusieurs grandes sources d'erreur, d'ailleurs liées (mauvaise exploitation du dessin) :

- dessin insuffisant (ex : pas de courants bien définis)
- mauvaise translation entre le cours et l'exercice (ex : écrire $i = C\dfrac{dU}{dt}$ alors qu'il faudrait $i_2 = C\dfrac{dU_2}{dt}$)
- erreurs basiques dans lois des mailles et des noeuds

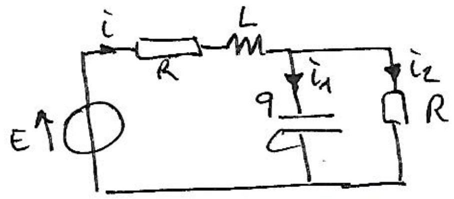
Sur un exemple, je vais vous montrer ces erreurs (pour ne plus les faire !), et deux méthodes qui marchent : choisissez celle que vous préférez !

Exercice : Régime transitoire d'un circuit R L C R

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert. À $t = 0$, on ferme K.
1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$, présente sur l'armature supérieure du condensateur.

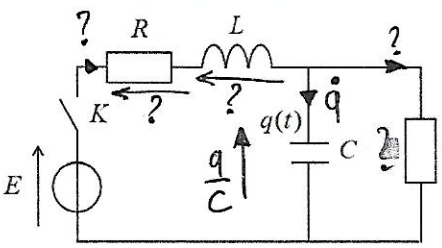


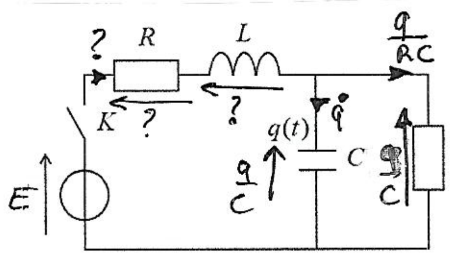
Erreurs vues

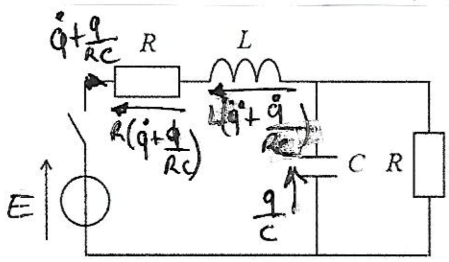


- Loi des mailles $E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$. Comme (cours) $i = \frac{dq}{dt}$, on a $E = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$ NON !
- $i_1 = i_2 = \frac{i}{2}$ (" le courant se divise en 2")
- on tourne en rond : $E = R(i_1+i_2) + L\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + \frac{q}{C}$, puis pour calculer $\frac{di_2}{dt}$, on utilise $i_2 = i - i_1$ --- Ne pas réintroduire 1 variable éliminée avant !
- Lois des mailles rigolottes : $E = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri_2$

Méthode qui marche : Compléter Tout le dessin avec l'inconnue q et les données R, L, C, E $\Rightarrow$ AUCUNE autre inconnue si possible !
Je détaille en 3 étapes "chronologiques" : (n'en faites qu'1 seul dessin !)



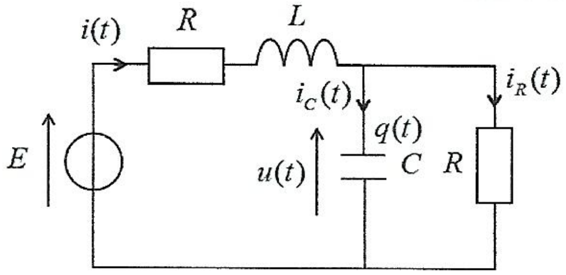




$\Rightarrow$ Ldm : $E = R\left(\dot{q} + \frac{q}{RC}\right) + L\left(\ddot{q} + \frac{\dot{q}}{RC}\right) + \frac{q}{C} = L\frac{d^2q}{dt^2} + \left(R + \frac{L}{RC}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{2q}{C} =$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{2q}{LC} = \frac{E}{L}$$

Autre méthode qui marche : Un dessin complet, précis, et de la rigueur !



$$E = u_R + u_L + u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

Or, la loi des nœuds donne :

$$i = i_R + i_C = \frac{u}{R} + \frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC} + \frac{dq}{dt}$$

On obtient donc :

$$E = R\left(\frac{q}{RC} + \frac{dq}{dt}\right) + L\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{RC} + \frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C}$$

$$E = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + \frac{L}{RC}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$$

En fait c'est la même méthode... L'avantage que je vois au dessin est de forcer à travailler sur le dessin, rigoureusement et systématiquement pour éviter de se noyer dans les inconnues..

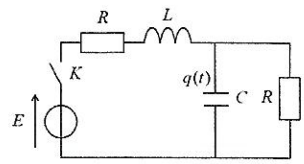
II. Conditions initiales

Attention : vous n'avez que deux outils : $\begin{cases}\text{Continuité de } u_C \\ \text{Continuité de } u_L\end{cases}$

Ne pas faire l'erreur classique, déja signalée maintes fois : "comme $u(0) = 0$, alors $\frac{du}{dt}(0) = 0$". C'est FAUX !
A retenir : **"Les conditions initiales de la dérivée ne sont pas les derivées des conditions initiales !"**
Il faut donc OBLIGATOIREMENT REVENIR AU DESSIN, éventuellement LE REFAIRE avec les dipôles équivalents à $t = 0$ et utiliser les deux continuités pour déterminer les CI, en particulier celle sur la dérivée.

Exercice : Régime transitoire d'un circuit R L C R

Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé et l'interrupteur K est ouvert. À $t = 0$, on ferme K.
2) Que valent $q(0)$ et $\dot q(0)$?



• avec des phrases :

— Initialement, le condensateur est déchargé. Donc, par continuité de $u = \frac{q}{C}$ à ses bornes, on déduit que q est continu et que

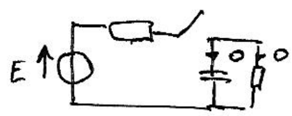
$$\boxed{q(0^+) = 0}$$

— Par continuité du courant i circulant dans la bobine, on a $i(0^+) = 0$. Or $i = i_C + i_R = \frac{dq}{dt} + \frac{u}{R}$, ce qui devient pour $t = 0^+$:

$$\boxed{0 = \frac{dq}{dt}(0^+) + 0}$$

• avec 1 dessin à $t = 0^+$:

bobine ⟺ —/— car $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$



$\Rightarrow \underline{i_C(0) = 0 = \dot q(0)}$