Régimes sinusoïdaux forcés

Ce qu'il faut connaître

- Si un système linéaire reçoit en entrée une grandeur du type $A\cos(\omega t+\varphi_0)$, quelle est la forme de la grandeur de sortie ?
- Pour un signal complexe harmonique $\underline{x}(t)$ de pulsation ω, comment s'écrit $\dot{\underline{x}}$ en fonction de $\underline{x}$? Même question pour $\ddot{\underline{x}}$? Même question pour une primitive de $\underline{x}(t)$?
- Comment est définie l'impédance complexe d'un dipôle (en fonction de $\underline{u}$ et $\underline{i}$) ?
- Comment décrire rapidement ce qu'est un phénomène de résonance ?
- Relations utiles :

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}=-1 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}=\mathrm{j}$ (se retrouve avec $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$) $\frac{1}{\mathrm{j}}=-\mathrm{j}$	$\cos(x-\pi/2)=\sin(x)$ $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$

Propriété	Résistance	Bobine	Condensateur
Symbole normalisé			
Loi de comportement	$u=Ri$		
Loi de comportement en représentation complexe	$\underline{U}=R\underline{I}$		
Impédance complexe $\underline{Z}=\underline{U}/\underline{I}$ en RSF	$\underline{Z_R}=R$		
Dipôle équivalent en basses fréquences ($\omega\sim 0$)	Résistance R		
Dipôle équivalent en hautes fréquences ($\omega\to+\infty$)	Résistance R		
Puissance reçue $P=ui$	$P=Ri^2=u^2/R$		
Énergie stockée	aucune		
Grandeur physique nécessairement continue	aucune		

Ce qu'il faut savoir faire

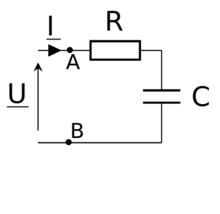
- Repérer le régime transitoire et le régime permanent (sinusoïdal forcé) sur un relevé temporel.
- Associer à un signal réel harmonique $x(t)$ son signal complexe $\underline{x}(t)$.
- Faire apparaître l'amplitude complexe. Savoir en déduire l'amplitude et la phase à l'origine.
- Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
- Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence.
- Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple, obtenir la solution réelle à partir de la solution complexe.
- Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes et inversement
- Exemples à savoir traiter en complexes : résonance en intensité et tension du circuit RLC série , de l'oscillateur masse-ressort
- Relier l'acuité d'une résonance forte au facteur de qualité Q .
- Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux.

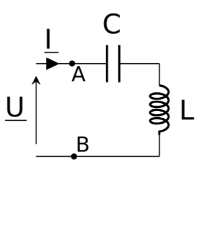
EC1 - Associer à un signal réel harmonique $x(t)$ son signal complexe $\underline{x}(t)$ et vice-versa
1 - Donner le signal complexe associé à chacun des signaux suivants (où à chaque fois $u_0>0$), et donner l'expression de l'amplitude complexe : (a) $u(t)=u_0\cos(\omega t-\pi/4\ )$, (b) $u(t)=-u_0\cos(\omega t)$, (c) $u(t)=u_0\sin(\omega t)$,
2 - Dans le cas (b), que vaut la phase à l'origine et l'amplitude du signal ?
3 - Dans l'autre sens maintenant : on considère les amplitudes complexes suivantes, donner à chaque fois l'expression du signal réel associé.

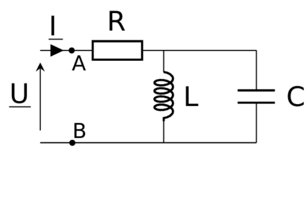
$$\text{(a) } \underline{U}_0=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3},\ \text{(b) } \underline{U}_0=u_0\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4},\ \text{(c) } \underline{U}_0=-u_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}.$$

EC2 - Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente

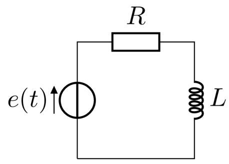
Donner l'expression de l'impédance équivalente à chaque association de dipôles.

1 -


2 -


3 -


EC3 - Trouver le comportement équivalent d'un circuit à haute et basse fréquence
On considère le circuit ci-contre. On se place en RSF : $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
1 - Déterminer la valeur du courant $i(t)$ dans le circuit lorsque $\omega \to 0$, et lorsque $\omega \to +\infty$.



EC4 Obtenir la solution complexe en régime sinusoïdal forcé pour un circuit électrique simple.
On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
1 - Quel est le signal complexe associé à $e(t)$? Comment s'exprime son amplitude complexe ?
2 - On cherche $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Comment s'écrit la grandeur complexe associée ? Et l'amplitude complexe ?
3 - En étudiant le circuit, trouver l'expression de l'amplitude complexe de $i(t)$ en fonction de E_0, R, L, et ω.
4 - Soit l'amplitude complexe $\underline{I}_0 = \frac{E_0}{R+jL\omega}$ trouvée précédemment. Donner l'expression de l'amplitude et de la phase à l'origine du signal réel associé.
Variante : le faire avec un circuit RC série (mêmes questions pour à la fin exprimer $\underline{I}_0$).

EC5 - Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes
On considère à nouveau un circuit RL série alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On peut montrer que l'équation différentielle suivie par le courant $i(t)$ est $e(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$.

I. Signaux sinusoïdaux

1. Définitions et propriétés

Théorème de Fourier : Toute fonction T-périodique peut s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales. L'étude de tout signal périodique peut donc se faire en étudiant des fonctions sinusoïdales !

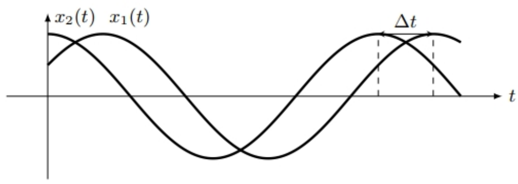
Signal sinusoïdal

de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ avec $\begin{cases} X_m \geqslant 0 \text{ amplitude} \\ \omega \text{ pulsation : } T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f} \\ \omega t + \phi \text{ phase instantannée et } \phi \text{ phase à l'origine.} \end{cases}$

Différence de phase

Le déphasage $\Delta\phi \in [-\pi; \pi]$ de $x_2(t)$ par rapport à $x_1(t)$ est

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \omega\Delta t = \frac{2\pi\Delta t}{T}$$



avec Δt l'avance temporelle de x_2 sur x_1.
- Si $\Delta\phi > 0$ alors x_2 est en avance de phase sur x_1.
- Si $\Delta\phi < 0$ alors x_2 est en retard de phase sur x_1.

On distingue quelques cas particuliers de déphasage : $\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ signaux en phase.} \\ \Delta\phi = \pi \text{ signaux en opposition de phase.} \\ \Delta\phi = \pi/2 \text{ signaux en quadrature de phase} \end{cases}$

2. Représentation complexe

a. Principe

A $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ on associe la grandeur complexe :

$$\underline{x}(t) = X\cos(\omega t + \varphi) + jX\sin(\omega t + \varphi) = Xe^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X} = Xe^{j\varphi} \text{ amplitude complexe.}$$

Lien entre grandeurs réelle et complexe

- Le module de l'amplitude complexe donne l'amplitude du signal réel : $|\underline{X}| = X$
- L'argument de l'amplitude complexe donne la phase à l'origine du signal réel : $\mathrm{Arg}(\underline{X}) = \varphi$
- La partie réelle de la grandeur complexe redonne x(t) : $\mathrm{Re}(\underline{x}(t)) = X\cos(\omega t + \varphi) = x(t)$

$\rightsquigarrow$ EC1

b. Propriétés

- Les amplitudes complexes s'ajoutent : si $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ alors $\underline{X} = \underline{X_1} + \underline{X_2}$.
- Dérivation par rapport au temps : dériver revient à multiplier par $j\omega$.

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{d\left(\underline{X}e^{j\omega t}\right)}{dt} = j\omega\underline{X}e^{j\omega t} = j\omega\underline{x}(t)$$

- Intégration par rapport au temps : intégrer revient à diviser par $j\omega$.

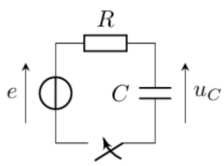
$$\int \underline{x}(t)dt = \int \underline{X}e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}\underline{X}e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)$$

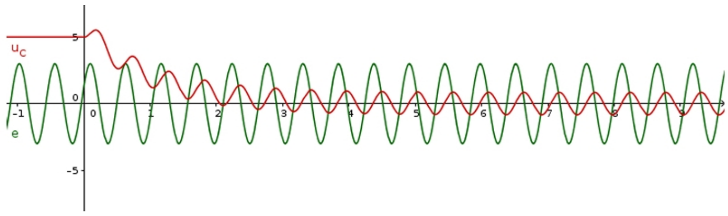
II. Etude d' un circuit électrique en R.S.F.

1. Passage du régime transitoire au régime sinusoïdal forcé

- Régime transitoire : lorsque la **sortie** d'un système évolue entre deux régimes permanents.
- Régime forcé : lorsque **l'entrée** du système est maintenue à une valeur non nulle $e(t) \neq 0$. Cette valeur peut être constante, harmonique (régime sinusoïdal forcé = RSF), ou une fonction périodique (un créneau par exemple).
- Régime libre : lorsque $e(t) = 0$ (aucune source d'énergie n'alimente le système).

Exemple : A $t = 0$ on ferme l'interrupteur, condensateur initialement chargé. Repérer les régimes permanent, transitoire, forcé





▹ Mathématiquement : Un système du second ordre en RSF obéit à une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 x(t) = A_0\cos(\omega t).$$

La solution est la somme :
- d'une solution homogène $s_H(t)$ de l'équation sans second membre : c'est le régime transitoire, qui décroit exponentiellement au bout de quelques $\tau = 2\pi/\omega_0$;
- d'une solution particulière de l'équation complète $s_p(t)$, que l'on recherche en $\cos(\omega t + \varphi)$: c'est le régime permanent

⇒ Dans ce chapitre, nous supposons que le régime transitoire est terminé et nous étudions uniquement le régime permanent sinusoïdal. Nous ne nous intéressons pas aux conditions initiales.

2. Impédances complexes

Loi d'Ohm généralisée : Pour tout dipôle linéaire, on peut écrire :

$$\underline{u} = \underline{Z}\underline{i} \Leftrightarrow \underline{i} = \underline{Y}\underline{u} \text{ avec } \begin{cases} \underline{Z} \text{ impédance complexe (en } \Omega \text{) ;} \\ \underline{Y} = 1/\underline{Z} \text{ admittance complexe (en } \Omega^{-1} \text{ ou siemens } S \text{)} \end{cases}$$

- Le module de $\underline{Z}$ donne le rapport des amplitudes :

$$U/I = |\underline{Z}|$$

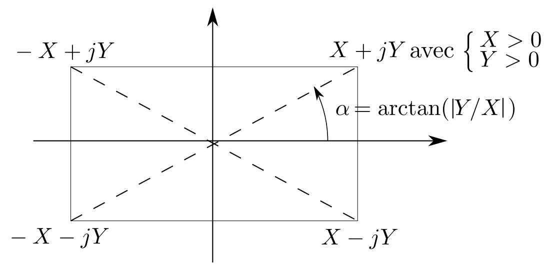
- L'argument de $\underline{Z}$ donne l'avance de phase de u sur i : $\boxed{\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \text{Arg}(\underline{u}) - \text{Arg}(\underline{i}) = \text{Arg}(\underline{Z})}$.

Argument φ d'un complexe

On choisit en physique $-\pi < \varphi < \pi$.

• Expression algébrique : En s'appuyant sur le dessin ci-contre dans le plan complexe, exprimer $\arg(X + jY)$ suivant les signes de X, Y, en fonction de $\alpha = \arctan(|Y/X|)$:

$\arg(X + jY)$	$X < 0$	$X > 0$
$Y > 0$		
$Y < 0$		

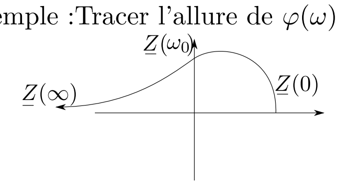


Attention, $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$....

Ce tableau n'est pas à apprendre par coeur, savoir refaire le raisonnement suffit

• Valeurs asymptotiques : Souvent on ne cherche qu'une limite de φ lorsque $\underline{Z} \to \underline{Z}_l$. Il est alors plus simple de placer (mentalement) $\underline{Z}_{lim}$ dans le plan complexe et d'en déduire sans calcul φ correspondant

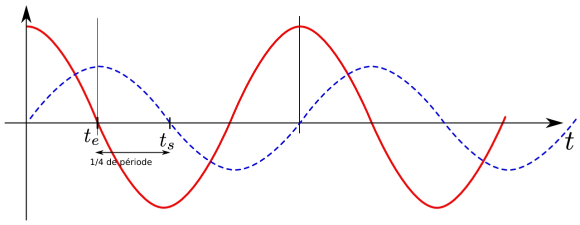
Exemple :Tracer l'allure de $\varphi(\omega)$ à partir de la "trajectoire" $Z(\omega)$ ci dessous :



3. Résistance, inductance, capacité

- Pour chaque composant, écrire la loi de comportement entre grandeurs réelles. En déduire celle entre grandeurs complexes, puis l'expression de l'impédance, puis le déphasage entre u et i

Dans le cas d'une bobine, on relève les courbes ci-contre. Identifier u et i.



Comportements en basses et hautes fréquences (BF/HF)

Dipôle	$\underline{Z}$	$\underline{Z}(\omega \to 0)$	dipôle équivalent BF	$\underline{Z}(\omega \to \infty)$	dipôle équivalent HF
Condensateur					
Bobine					

4. Lois générales pour les circuits linéaires en RSF

Les lois vues en electrocinétiques sont encore valables en RSF entre les grandeurs complexes, ou entre les amplitudes complexes : par exemple diviseurs de tension et de courant, loi des noeuds en termes de potentiel (LNP).
En rappeler les dessins et formules avec des impédances $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \cdots$

5. Exemples

1/ Savoir associer les impédances $\rightsquigarrow$ EC2
2/ Savoir mener une étude en régime asymptotique $\rightsquigarrow$ EC3
3/ Savoir obtenir la solution complexe en utilisant les impédances complexes $\rightsquigarrow$ EC4
4/ Inversement : obtenir l'équation différentielle en passant par la solution complexe $\rightsquigarrow$ EC5

III. Résonance

Résonance

Il y a résonance si l'amplitude du signal étudié $U(\omega)$ possède un maximum local en ω_r.

Attention ! Ne pas confondre les pulsations :

- La **pulsation propre** ω_0, à laquelle le' système oscille s'il est abandonné sans contrainte. Pour le système masse-ressort : $\omega_0 =$, ou pour le circuit RLC : $\omega_0 =$
- La **pseudo pulsation** d'un régime libre amorti $\Omega =$
- La pulsation du forçage, ω.
- L'éventuelle **pulsation de résonance**, ω_r, pulsation de forçage pour laquelle la réponse est la plus forte.

En général, la résonance a lieu lorsque le système est forcé à **sa pulsation propre ou presque** : $\omega_r \simeq \omega_0$. Elle est d'autant plus forte que le facteur de qualité Q est grand.
En effet, lorsqu'on force le système à sa fréquence propre, l'énergie qu'on lui transmet est toujours apportée en phase, et augmente sans cesse. (Lorsque l'on fait de la balançoire, on pousse toujours au bon moment pour que l'amplitude des oscillations augmente.)

Définitions

- **Pulsation(s) de coupure** : celles pour lesquelles l'amplitude U de la grandeur d'intérêt est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$:

$$\omega_c \text{ est telle que } U(\omega_c) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Il y a en général deux pulsations de coupures, ω_{c1} et ω_{c2}.

- **Bande passante** $\Delta\omega$: l'ensemble des pulsations pour lesquelles $U > \dfrac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$ (pas trop atténuées)

$$\Delta\omega = |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$$

IV. Études de systèmes d'ordre 2

1. Mise en équation

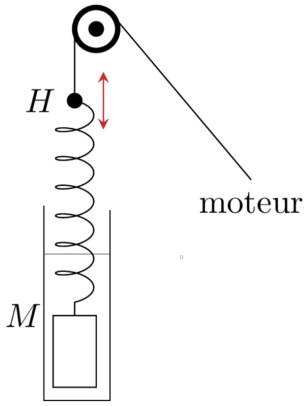
a. RLC série

En utilisant les impédances, montrer que le courant i et la tension aux bornes du condensateur u_C dans le RLC série soumis à une tension $E = E_0 \cos \omega t$ vérifient

$$\underline{U}_C = \frac{U_m}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2} \text{ et } \underline{I} = \frac{I_m}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Expliciter U_m, I_m, la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

b. Oscillateur mécanique forcé



Un système de moteur et de poulie permet de faire osciller de façon harmonique le point d'attache du ressort :

$$y_H(t) = A\cos(\omega t).$$

L'objet M, de masse m, volume V, se déplace dans un fluide de masse volumique ρ, exerçant une force de frottement fluide de type $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. On notera $m' = m - \rho V$ (masse apparente de M).

- Établir l'équation du mouvement de la masse M en RSF et l'écrire sous la forme canonique

$$\underline{Z}_C = \frac{Z_m}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$$

- Montrer que la vitesse de l'objet vérifie alors

$$\underline{V} = \frac{V_m}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

Méthode :
① Prendre un repère, une origine dans un référentiel galiléen
② Représenter avec rigueur sur le dessin la longueur du ressort, les forces
③ Écrire le PFD en projection
④ Changer (éventuellement) d'origine et de variable pour obtenir un mouvement oscillant autour de l'origine.