Filtrage

Ce qu'il faut connaître

- Savoir que l'on peut décomposer un signal périodique (période T_0, pulsation ω_0) en une somme de fonctions sinusoïdales.
- Dans cette décomposition, qu'est-ce qui est appelé le fondamental ? Et les harmoniques ? Quelles sont leurs pulsations ?
- Faire un schéma de l'allure d'un spectre (d'un signal créneau par exemple). Où trouve-t-on la valeur moyenne ?
- Quelle partie d'un diagramme de Bode a-t-elle pour action de dériver le signal d'entrée ? Et d'intégrer le signal d'entrée ? Que faut-il faire pour ne garder que la valeur moyenne d'un signal périodique ?

Ce qu'il faut savoir faire

- Trouver la nature d'un filtre (prévision du comportement à basse et haute fréquence) à partir de son schéma.
- Exprimer la fonction de transfert d'un circuit électronique ou d'un système mécanique.
- Calculer le module et l'argument de la fonction de transfert, tracer le diagramme de Bode associé.
- Étant donné un signal harmonique en entrée, en déduire l'expression du signal de sortie (la fonction de transfert étant donnée).
- Étant donnée l'expression canonique d'un filtre passe-bas du 1^{er} ou du 2^{nd} ordre, passe-haut du 1^{er} ordre, ou passe-bande du 2^{nd} ordre, savoir :

✓ Réaliser l'étude asymptotique et tracer l'allure du diagramme de Bode.

✓ Exprimer le gain en décibel et l'argument de $\underline{H}$.

✓ Retrouver les expressions des pulsations de coupures.

✓ Pour le cas de l'ordre 2, retrouver la condition de présence d'une résonance.

- Prédire l'action d'un filtre sur un signal périodique.
- Établir le gabarit d'un filtre en fonction d'un cahier des charges.

I. Généralités sur les filtres

On note $e(t)$ un signal d'entrée, $s(t)$ le signal de sortie associé, et $e(t) \xrightarrow{\text{sys}} s(t)$ l'action du filtre.

1. Nature d'un filtre

On peut prédire simplement le comportement du filtre à basse fréquence ($\omega \to 0$) et à haute fréquence ($\omega \to +\infty$) en remplaçant bobines et condensateurs par leur comportement limite.
Rappel : À basse fréquence, bobine = et condensateur = ;
À haute fréquence, bobine = et condensateur =

Type de filtre

- Passe-bas : coupe les hautes fréquences
- Passe-haut : coupe les basses fréquences
- Passe-bande : coupe les hautes et basses fréquences
- Coupe-bande : coupe des fréquences intermédiaires, mais ni les HF ni les BF

2. Fonction de transfert

Définition : fonction de transfert d'un filtre

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S_0}}{\underline{E_0}}.$$

$\underline{H}$ contient toute l'information sur le filtre : $\begin{cases} |\underline{H}(\omega)| = \dfrac{|\underline{s}|}{|\underline{e}|} = \dfrac{S_0}{E_0} \quad \to \quad \text{amplitude de sortie } S_0 \\ \arg(\underline{H}(\omega)) = \arg\left(\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right) = \varphi_s - \varphi_e \quad \to \quad \text{phase de sortie } \varphi_s. \end{cases}$.

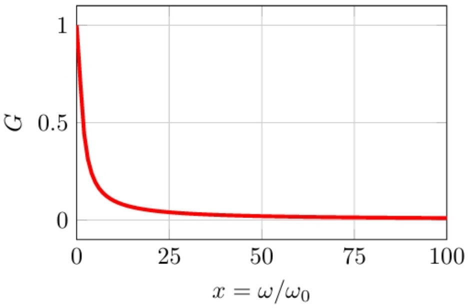
3. Comportement en fréquence

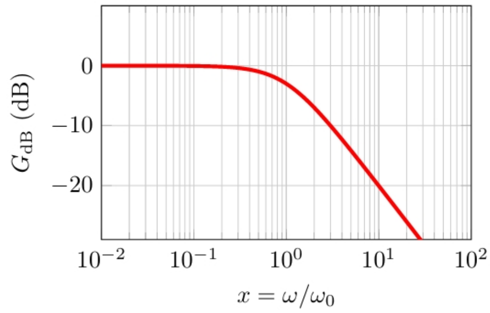
Comme la pulsation ω peut varier sur de grands intervalles (de quelques Hz à plusieurs MHz par exemple), on préfère souvent utiliser une échelle logarithmique.

Diagramme de Bode

- On définit le gain $G(\omega) = |\underline{H}|$ et le gain en décibel $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log(|\underline{H}|)$.
- Le diagramme de Bode en gain est le tracé de G_{dB} en fonction de $\log\omega$ (ou de $\log f$).
- Le diagramme de Bode en phase est le tracé de $\arg(\underline{H})$ en fonction de $\log\omega$ (ou de $\log f$).
- Sur ces diagrammes, une **décade** représente la multiplication par 10 de ω (ou de f).

Attention avec les échelles : ci-dessous pour le même filtre :
- Tracé de $G(\omega) = |\underline{H}|$ en fonction de ω/ω_0, échelle linéaire en abscisse et ordonnée.
- Tracé de G_{dB} en fonction de ω/ω_0, mais avec une échelle logarithmique en abscisse.





- En abscisse il n'y a pas de 0, il est à l'infini vers la gauche.
- En ordonnée $G_{\text{dB}} = 20 \log G$ donc c'est aussi une sorte d'échelle logarithmique, mais pour G.
- On a donc une échelle log-log, dans ce type de diagramme les asymptotes vont souvent être des droites.

Interprétation : $G_{\text{dB}} = 20 \log (S_0/E_0)$ donc $\begin{cases} G_{\text{dB}} > 0 \Leftrightarrow S_0 > E_0, \text{ amplification} \\ G_{\text{dB}} < 0 \Leftrightarrow S_0 < E_0, \text{ atténuation} \end{cases}$

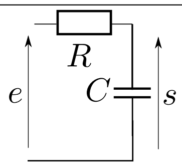
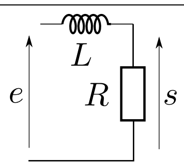
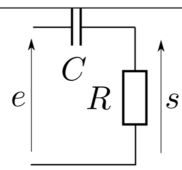
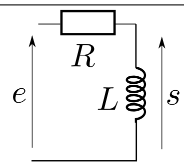
Pulsation de coupure et bande passante à -3 dB

Les pulsations de coupure ω_c satisfont $\begin{cases} G(\omega_c) = \dfrac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \\ \text{ou } G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB} \end{cases}$

Car $20 \log(\sqrt{2}) = 10 \log 2 \simeq 3$
Il peut y avoir une ou deux pulsations de coupures.
Bande passante : domaine de pulsations où $G_{dB} > G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB} \Leftrightarrow G > G_{max}/\sqrt{2}$

II. Étude pratique

1. Filtres d'ordre 1

				
Schéma BF				
Schéma HF				
Nature				
$\underline{H}(x)$				

Équivalent $\underline{H}$ BF		
équation asymptote BF		
limite phase BF		
Équivalent $\underline{H}$ HF		
équation asymptote HF		
limite phase HF		
$\underline{\mathrm{H}}(x=1)$		
$\mathrm{G}(x=1)$		
$\mathrm{G}_{dB}(x=1)$		
$\varphi(x=1)$		

2. Filtres d'ordre 2 (en TD)

3. De l'équation différentielle à la fonction de transfert

• Un filtre du premier ordre est régi par $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+as(t)=b\dfrac{\mathrm{de}}{\mathrm{d}t}+ce(t)$. Quelle est la forme de la fonction de transfert associée ?

• Inversement, si $\underline{H}=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$, quelle est l'équadiff régissant $s(t)$?

III. Action d'un filtre sur un signal périodique

1. Décomposition de Fourier d'un signal périodique

Tout signal périodique $e(t)$, de période T_e ($\omega_e=\frac{2\pi}{T_e}$) se décompose comme somme de signaux harmoniques

$$e(t)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos\left(n\omega_e t+\varphi_n\right)$$

Définitions (rappels sur le spectre)

- c_0 est la valeur moyenne du signal, ou encore sa composante continue.
- Le n-ième terme est appelé l'harmonique de rang n, sa pulsation est $n\omega_e$ (multiple entier de ω_e).
- L'harmonique $n=1$ est de même période que le signal $e(t)$, il s'agit du fondamental. ω_e est aussi appelée pulsation fondamentale.

2. Aspect temporel : dérivateur, intégrateur, moyenneur

Propriété : moyenneur ⇔ passe-bas

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c très petite devant la fréquence f_0 du signal d'entrée aura un effet moyenneur.

Propriété : dérivateur ⇔ +20 dB/ déc

Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente +20 dB/ déc, alors il aura un comportement dérivateur sur cette gamme de fréquence.

Démonstration :

Propriété : intégrateur ⇔ −20 dB/ déc

Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de pente -20 dB/ déc, alors il aura un comportement intégrateur sur cette gamme de fréquence.

Démonstration :

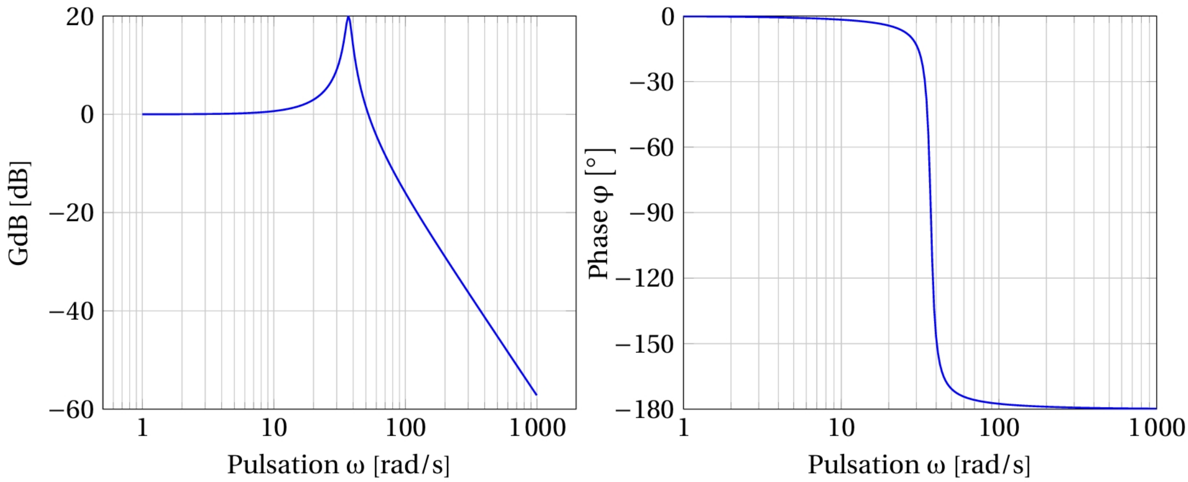
Savoir y penser : triangle créneau

3. Action d'un filtre sur un signal, méthode

① On décompose le signal en série de Fourier (hors programme)
② Pour chaque harmonique, lire sur le diagramme de Bode (ou calculer par la fonction de transfert) comment elle est modifiée lors du passage dans le filtre (phase et amplitude) :

$$u_\mathrm{s}(t) = 10^{\mathrm{G_{dB}}/20} u_{\mathrm{e}0} \cos\left(\omega t + \varphi_\mathrm{e} + \varphi(\omega)\right)$$

③ Par linéarité, le signal de sortie est la somme des harmoniques en sortie.
Exemple : Trouver l'expression du signal en sortie du filtre défini par les diagrammes de Bode suivants, pour le signal d'entrée $u_\mathrm{e}(t) = 2\cos(30 \times t) + 10\sin(250 \times t)$



4. Gabarit d'un filtre

Le gabarit d'un filtre est le diagramme de Bode du filtre sur lequel apparaissent les zones de pulsations à atténuer : le tracé du gain doit éviter les zones grisées.