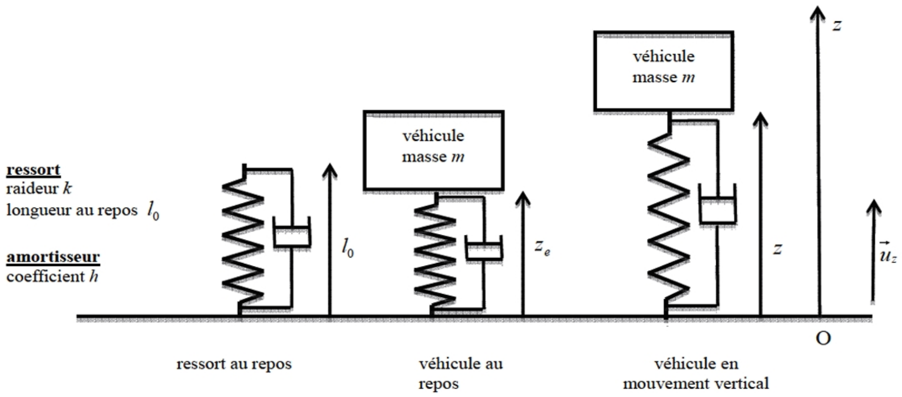
DM - Oscillateurs amortis

I. Mécanique : Suspension d'un véhicule

On considère un véhicule de masse m. Le système de suspension de ce véhicule peut être représenté par l'association d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, et d'un amortisseur provoquant une force de frottement de type fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$. Toute autre source de frottements est négligée.



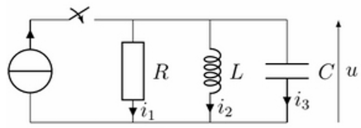
1. On néglige le poids du système de suspension et des roues. Déterminer la relation entre la longueur à vide et la longueur d'équilibre du ressort du système.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement vertical du véhicule lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre.
3. Déterminer le coefficient h pour que le régime d'amortissement soit critique.
4. L'usure des amortisseurs due au temps entraîne une diminution du coefficient h d'un cinquième de sa valeur initiale :

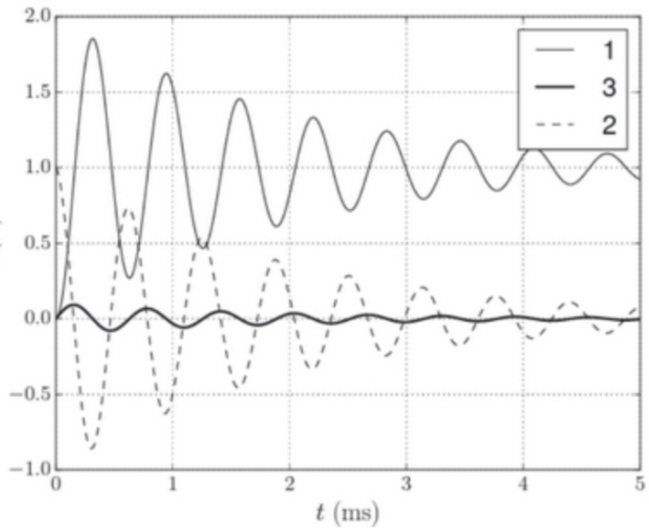
$$h' = h\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

Qualifier le régime d'amortissement dans ce cas.
5. Un trou dans la chaussée écarte le ressort de sa position d'équilibre d'une longueur h_0. En considérant que la vitesse verticale est nulle en h_0, résoudre l'équation différentielle régissant l'évolution du mouvement vertical du véhicule.
6. Déterminer le temps nécessaire pour que les oscillations du véhicule deviennent négligeables.
Applications numériques : $m = 800$ kg; $k = 31000$ N.m^{-1}; $l_0 = 50$ cm. On considérera les oscillations du véhicule négligeables lorsque leur amplitude maximale est divisée par un facteur e^{10}.

II. Electricité : Circuit RLC parallèle

On dispose du circuit RLC parallèle ci-contre. Le condensateur de capacité C est initialement déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur alimentant ainsi le circuit par un échelon de courant d'intensité $I = 1.0$ A , on donne $R = 1 \times 10^4 \Omega$ et $L = 0.10$H.

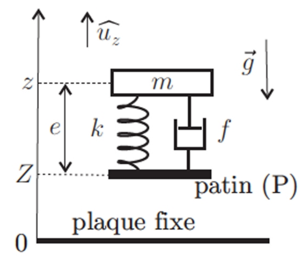




La figure ci-contre représente l'évolution des trois courants i_1, i_2 et i_3 en fonction du temps.
1. Associer les trois courbes 1,2 et 3 aux différents courants.
2. Établir l'équation différentielle satisfaite par i_2.
3. À partir des graphes des intensités, estimer la valeur de la capacité C du condensateur.

DM * - Modèle mécanique du rebond d'une goutte (Mines 2013)

On modélise la tendance d'une goutte à reprendre une forme sphérique par un ressort de raideur k. Pour prendre en compte par ailleurs l'inertie de la goutte et d'inévitables frottements internes, on adopte le modèle de la figure suivante : on attache sous une masse ponctuelle $m = 6,3$ mg un patin (P) plan, de masse nulle via un ressort de raideur $k = 2,6$ N/m et de longueur à vide e_0 et un amortisseur qui exerce sur m une force de la forme $\vec{F} = -f\dot{e}\vec{e}_z$ où e est la distance entre la masse m et le patin. Le ressort et l'amortisseur sont montés en parallèle. On néglige la masse du ressort et la masse de l'amortisseur. Dans ce modèle, toute la masse de la goutte est concentrée en son sommet.



À chaque instant t, on repère les mouvements du système par la cote $z(t)$ de la masse m et par la cote $Z(t)$ du patin (P), la cote nulle étant prise sur la plaque fixe.
Le système est abandonné avec les conditions initiales $z(0) = h + e_0, \dot{z}(0) = 0, e(0) = e_0$ et $\dot{e}(0) = 0$. On néglige les forces exercées par l'air.

1. En considérant que la goutte est en chute libre et que $e(t)$ reste constamment égal à e_0, déterminer en fonction de h et g, l'expression du module de la vitesse $v_0 = |\dot{z}(t_0)|$ de la masse m à l'instant t_0 où le patin touche la plaque de cote $z = 0$. Calculer numériquement v_0.

On fixe désormais l'origine des temps $t = 0$ au moment où le patin touche la plaque. Du fait de sa masse nulle, sa vitesse devient instantanément nulle. On repère alors l'évolution de l'épaisseur $e(t)$ avec les conditions initiales $e(0) = e_0$ et $\dot{e}(0) = -v_0$. Dans toute la suite du problème, on considère que le poids de la goutte est négligeable devant toutes les autres forces en jeu.

2. On suppose que le patin reste au contact de la plaque. Montrer que l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\delta(t) = e(t) - e_0$ se met sous la forme :

$$\ddot{\delta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\delta} + \omega_0^2\delta = 0$$

où l'on exprimera les constantes positives ω_0 et Q en fonction de m, k et f.

3. On suppose $Q^2 \gg 1$. En déduire que la solution générale est de la forme :

$$\delta(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)(B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t))$$

et déterminer les expressions des constantes B et C en fonction de v_0 et ω_0.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la suite des instants correspondant aux maxima successifs de $\delta(t)$. On admet que les oscillations de $\delta(t)$ sont perceptibles tant que leur amplitude $\delta(T_n)$ reste supérieure ou égale à 10% de la valeur initiale $\delta(T_0)$. Exprimer le nombre d'oscillations perceptibles en fonction de Q. Combien peut-on en observer si $Q = 5$? On conservera cette valeur de Q pour la suite.

On s'intéresse désormais à la possibilité de décollement du patin. On note $\vec{R} = R\vec{e}_z$ l'action de contact exercée par la plaque fixe sur le patin.

5. Établir l'expression de R en fonction de k, f, δ et $\dot{\delta}$.

6. En limitant les calculs à l'ordre 1 en $1/Q$, montrer que

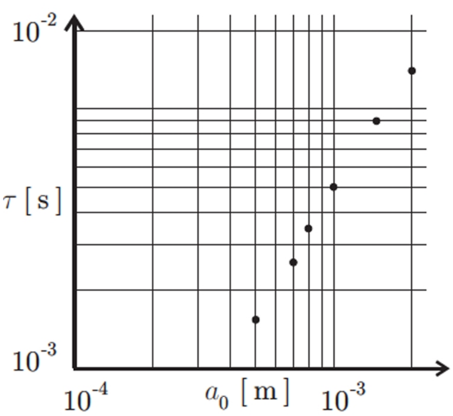
$$R = m\omega_0 v_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{Q}\cos(\omega_0 t)\right)$$

7. Déterminer l'instant $\tau > 0$ où le patin décolle. Calculer sa valeur. Le modèle est-il en accord avec les observations ?

8. On néglige le terme $1/Q$ dans l'expression de τ. En utilisant les résultats de la partie 1 , montrer que le modèle prévoir que l'évolution de τ en fonction de a_0 est donnée par

$$\log(\tau) = \text{ constante } + \frac{3}{2}\log(a_0)$$

9. Une étude expérimentale sur des gouttes dont les rayons sont compris entre $0,5$ mm et 2 mm a permis de tracer le graphe suivant :



Cette expérience valide-t-elle le modèle étudié ici ?