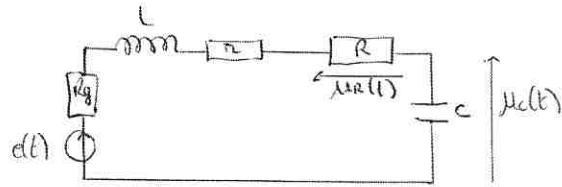


Correction DS n°3

Problème 1: Etude d'un circuit RLC série



Partie A

1. Impédance complexes	Bobine	Résistor	Condensateur
$\underline{Z}$	$jL\omega$	R	$\frac{1}{jC\omega}$

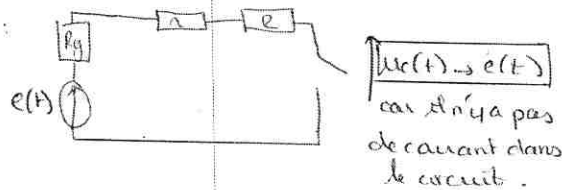
Les dipôles étant en série, on ajoute leurs impédances :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z} = R_g + R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R_{tot} + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \underline{Z}$$

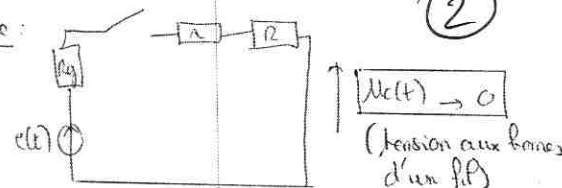
2.

	Résistor	Bobine	Condensateur
basse fréq	$Z_R = R$	$Z_L \rightarrow 0$	$Z_C \rightarrow \infty$
haute fréq	$Z_R = R$	$Z_L \rightarrow \infty$	$Z_C \rightarrow 0$

Circuit en basse fréquence :



Circuit en haute fréquence :



3. D'après la loi des mailles, $\underline{u}_C(t) + R_{tot} \underline{i}(t) + \underline{Z}_L \underline{i}(t) = \underline{e}(t)$
or $\underline{i}(t) = C \underline{u}_C'(t) = jC\omega \underline{u}_C(t)$

$$\text{soit } \underline{u}_C(t) + R_{tot} jC\omega \underline{u}_C(t) + jL\omega(jC\omega) \underline{u}_C(t) = \underline{e}(t)$$

$$\Leftrightarrow (1 - LC\omega^2 + jR_{tot}C\omega) \underline{u}_C(t) = \underline{e}(t)$$

$$\Leftrightarrow (1 - LC\omega^2 + jR_{tot}C\omega) \underline{u}_{Cm} e^{j\omega t} = E_m e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{u}_{Cm} = \frac{E_m}{1 - LC\omega^2 + jR_{tot}C\omega} \quad (2)$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R_{tot}C\sqrt{LC}}$, on obtient $\underline{u}_{Cm} = \frac{A}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$
 $A = E_m \quad (2)$

4. $\underline{u}_{Cm} = |\underline{u}_C| = \frac{E_m}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2]^2 + (\frac{\omega}{Q\omega_0})^2}}$ en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\underline{u}_{Cm} = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (\frac{x}{Q})^2}}$ (2)

5. On nous dit que $\underline{u}_{Cm}$ passe par un maximum pour $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ avec $Q > Q_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

on a alors $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0 \quad (2)$

6. $\underline{u}_{Cm}(\omega_0) = \underline{u}_{Cm}(x=1) = E_m Q \quad (1)$

7. Carte 1 : $Q = 10$
Carte 2 : $Q = 2$
Carte 3 : $Q = \frac{1}{10}$
car il y a un maximum et le pic le plus haut a le facteur de qualité le plus grand.
pas de maximum.

Partie B

1. $\underline{Z} = R_{tot} + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \quad (A.1)$
 $= R_{tot} [1 + j\frac{L\omega}{R_{tot}} + \frac{1}{jR_{tot}C\omega}] = R_{tot} [1 + j(\frac{L\omega}{R_{tot}} - \frac{1}{R_{tot}C\omega})]$
 $= R_{tot} [1 + j\frac{L}{C} \frac{1}{R_{tot}} (\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega})]$
 $= R_0 [1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})]$ avec $R_0 = R_{tot} \quad (2)$

2. $\underline{I_m} = \frac{E_m}{Z}$ Par définition -

Soit $\underline{I_m} = \frac{E_m}{R_0(1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}))}$ (1)

3. On a alors l'amplitude $I_m(\omega) = |\underline{I_m}| = \frac{E_m/R_0}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$ (2)

$A' = \frac{E_m}{R_0}$ et $B' = Q^2$

4. $I_m(\omega)$ maximum par son dénominateur minimum par $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 1$
 $\Rightarrow \omega_0 = \omega_0$

Dans ce cas, $I_m(\omega_0) = I_m(\omega_0) = \frac{E_m}{R_0}$ (2)

5. La bande passante est définie par les fréquences $[w_1, w_2]$ telles que

$\frac{I_m(\omega_0)}{\sqrt{2}} \leq I_m(\omega) \leq I_m(\omega_0)$ (1)

6. U_m admet un maximum par $\omega_0 < \omega_0$
 $I_m = \dots \omega_0 = \omega_0$

On a donc : $\text{courbe 1} \rightarrow U_m$
 $\text{courbe 2} \rightarrow I_m$ (2)

On peut aussi voir que $I_m \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ et $U_m(0) = E_m \neq 0$

7. D'après ce qu'on veut de dire, $E_m = U_m(0) = 5V$ (1)

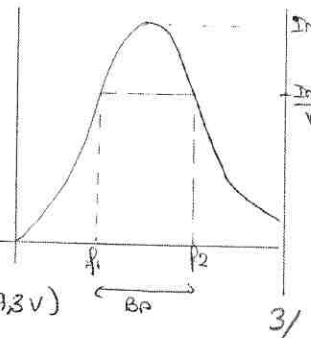
$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ obtenue par l'abscisse du maximum de la courbe 2 :
 $f_0 \approx 1,6 \text{ kHz}$ (1)

$I_{max} = 9 \text{ mA}$

bande passante en intensité : $f_2 = 2,15 \text{ kHz}$
 $f_1 = 1,25 \text{ kHz}$
 $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 6,4 \text{ mA}$ (1)
 $\Rightarrow \Delta f = 0,9 \text{ kHz}$

$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1,6}{0,9} = 1,8$ (1^{ère} façon) (1)

$U_{m,max} = E_m Q \Rightarrow Q = 1,9$ avec $(U_{m,max} = 9,3V)$ (2^{ème} façon) (1)



8. avec $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, on en déduit $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$

puis avec $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow R_{tot} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} - R_g$ (1)

$\underline{AN} : L \approx 66 \text{ mH}$ et $R \approx 8 \Omega$ (en prenant $Q = 1,8$)

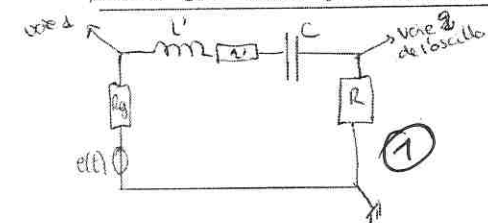
Sortie C.

1. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$; $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$; $u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \phi')$

$\phi = \arg(\underline{I_m})$ or $\underline{I_m}(\omega_0) = \frac{E_m}{R_0} \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi(\omega_0) = 0$ (2)

$\phi' = \arg(\underline{U_m})$ or $\underline{U_m}(\omega_0) = \frac{A}{j/\omega} = -jA\omega \Rightarrow \phi'(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$

2. On peut accéder expérimentalement à la mesure de $i(t)$, en prenant la tension aux bornes d'une des résistances (ou série) du circuit. ($u = R i$ l'idéal) (1)



Il faut déplacer R et C par pour prendre la tension aux bornes de R à l'oscilloscope (ou utiliser un transformateur)

3. En faisant varier la fréquence, on aura une certaine fréquence (f_0) par laquelle on observera la résonance d'intensité (donc de tension aux bornes de R) (1)

4. a) oscillogramme a) : déphasage nul (signaux en phase) (1)
 oscillogramme b) : déphasage de $\pm \frac{\pi}{2}$ (quand une courbe est maximale ou minimale, l'autre est nulle).
 L (signaux en quadrature de phase). (1)

b) Il n'y a pas de déphasage induit par une résistance (0.1)
 oscillogramme a) $\Rightarrow$ Résistance (1)
 Un condensateur implique un déphasage de $-\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ oscillogramme b. (1)

5. On mesure la période T_0 : 2,4 divisions pour 1 période soit 2,4 s.
On en déduit $f_0 = \frac{1}{T_0} \approx 833 \text{ Hz}$ puis la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0 = 52$

② On a alors $L' = \frac{1}{C\omega_0^2} = 0,24 \text{ H}$.

• on obtient $Q = \frac{U_{em \max}}{E_m}$ avec l'oscillogramme (b). $Q = \frac{5 \times 6 \text{ V/s}}{3 \times 2 \text{ V/s}} = 5$

$Q \approx 3,3$

② d'où $r' = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{V}{C}} = R = R_g = 23 \Omega$

conclusion on obtient $L' = 0,24 \text{ H}$ et $r' = 23 \Omega$.

Problème 2: Stabilisateur d'image

Système {plaque}

référentiel terrestre $\hat{=}$ galiléen

Bilan des forces: poids: $\vec{P} = m\vec{g}$

force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(x(t) - L_0)\vec{u}_x$

1. A l'équilibre, la 1^{ère} loi de Newton nous indique que $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$

Soit en projetant sur l'axe vertical: $mg - k(x_{eq} - L_0) = 0$

soit $x_{eq} = \frac{mg}{k} + L_0$ ②

2. on ajoute la force de frottement au bilan des forces.

d'après la 2^e loi de Newton: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f}$

a) on projette sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x}_p = mg - k(x_p - x_B - L_0) - d(\dot{x}_p - \dot{x}_B)$ ②

b) $m(\ddot{x}_p - \ddot{x}_B) = mg - k(x - L_0) - d\dot{x}$
 $= mg - k(x - x_{eq} + x_{eq} - L_0) - d\dot{x}$
 $= \underbrace{mg - k(x_{eq} - L_0)}_{=0} - k(x - x_{eq}) - d\dot{x}$
 (1')

③ $\Rightarrow \ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \underbrace{-\ddot{x}_B}_{f(t)} + \underbrace{\frac{k}{m}x_{eq}}_A$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
 $Q = \frac{m\omega_0}{d} = \frac{\sqrt{km}}{d}$

3. a) $x(t) - x_{eq} = x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t) = \ddot{x}(t)$

② Soit $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -\ddot{x}_B(t) = -A_m \cos(\omega t)$

b) On a $x(t) = X_m e^{j\omega t}$ avec $X_m = X_m e^{j\varphi}$
 $\ddot{X} = -\omega^2 X$ et $\dot{X} = j\omega X$

$$\text{Soit } -\omega^2 \underline{x}(t) + j\frac{\omega\omega_0}{Q} \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = -A_m e^{j\omega t}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}) \underline{x}(t) = -A_m e^{j\omega t}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}) \underline{x}_m e^{j\omega t} = -A_m e^{j\omega t}$$

$$\text{Soit } \underline{x}_m = \frac{-A_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

En prenant le module de $\underline{x}_m$:

$$|\underline{x}_m| = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \quad (2)$$

4. a) $\omega \ll \omega_0$: $|\underline{x}_m| \approx \frac{A_m}{\omega_0^2}$

($\omega_0^2 \gg \omega^2$ et $\frac{\omega\omega_0}{Q} \ll \omega_0^2$)
($\omega \ll \omega_0$)

(1) $\Rightarrow x(t)$ est proportionnelle à $a(t)$

b) $\underline{x}_m = -\frac{A_m}{\omega_0^2} = |\underline{x}_m| e^{j\pi}$

(1) d'où $x(t) = \frac{A_m}{\omega_0^2} \cos(\omega t + \pi) = -\frac{A_m}{\omega_0^2} \cos(\omega t) = -\frac{a(t)}{\omega_0^2}$

$$x(t) = -\frac{m}{k} a(t)$$

5. on veut vérifier que $f \ll f_0 \Leftrightarrow f \ll \frac{\omega_0}{2\pi}$
 $f \ll \omega_0 \Leftrightarrow f \ll \frac{\omega_0}{2\pi}$

or, d'après la courbe, $f_{\max} \approx 30 \text{ Hz}$

(2) $\alpha \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{796}{2\pi} \text{ Hz}$ et $\frac{\omega_0 Q}{2\pi} = \frac{3979}{2\pi} \text{ Hz}$

la condition est donc bien vérifiée!

Problème 3 : Cellules RL

À $t = 0$, on ferme K .

1. loi des nœuds en N : $i_1 = i_2 + i$ (1)

loi des mailles "à gauche" :

$$E - R i_1 - L \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (2)$$

loi des mailles "à droite" : $L \frac{di}{dt} + R i = L \frac{di_2}{dt} \quad (3)$

On dérive (1) : $\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di}{dt} \quad (1')$

(4) or, $\frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{R}{L} i \quad (1'') \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{di}{dt}$

on dérive (2) : $0 - R \frac{di_1}{dt} - L \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0$ et en dérivant (3) : $-\frac{d^2 i_2}{dt^2} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt}$

On remplace dans (1'') $\frac{di_1}{dt}$ par $-\frac{L}{R} \frac{d^2 i_2}{dt^2} = -\frac{L}{R} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt}$

soit $-\frac{L}{R} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{di}{dt}$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{3R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{R^2}{L^2} i = 0$$

on retrouve bien l'ED donnée en posant $G = \frac{L}{R}$

2. on calcule le discriminant du polynôme caractéristique

$$x^2 + \frac{3}{G}x + \frac{1}{G^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{G^2} - \frac{4}{G^2} = \frac{5}{G^2} > 0$$

Le régime est apériodique.

(4) Forme canonique : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$

avec $\omega_0 = \frac{1}{G}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{G} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0 G}{3}$

on peut aussi calculer Q pour déterminer le type de régime :

AN : $\tau = 1,10^{-5} \text{ s}$

$\omega_0 = 1,10^5 \text{ rad/s}$

$Q = 1/3 < 1/2 \Rightarrow$ régime apériodique.

3. $i(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique.

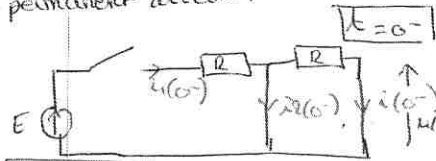
(2)

$$r_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{26} ; r_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{26}$$

4. a) à $t = 0^-$, K ouvert, le régime permanent atteint :

• $i_1(0^-) = 0$ (K ouvert)

$\Rightarrow i_2(0^-) = i(0^-) = 0$



(2) Par continuité de i dans la bobine, $i(0^+) = 0$

À $t = 0^+$, il n'y a toujours pas de courant dans les bobines, donc d'après la loi des mailles, $i_1(0^+) = 0$ aussi.

b) c) loi des mailles: $E - R i_1(0^+) - R i_1(0^+) - L \frac{di}{dt}(0^+) = 0$

(2) soit $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$

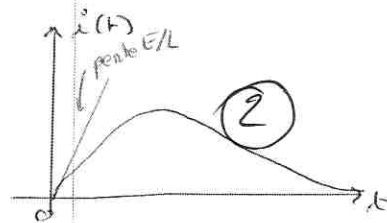
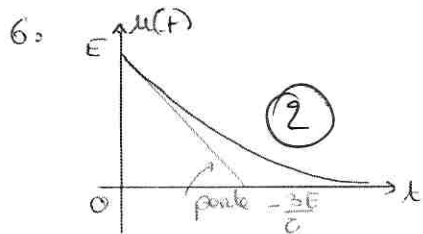
d) D'après l'ED: $\frac{d^2 i}{dt^2}(0^+) + \frac{3}{8} \frac{di}{dt}(0^+) + \frac{i(0^+)}{8^2} = 0$

(2) avec $u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt}(0^+) = -\frac{3L}{8} \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{-3E}{8}$

5. Au bout d'un temps très long:

(2) $u_{\infty} = 0$ (tension aux bornes d'un fil)

D'après la loi des mailles à droite: $R i_{\infty} = 0 \Rightarrow i_{\infty} = 0$



7. Énergie stockée par les 2 bobines au bout d'un temps très long:

$E_{\text{bob}} = \frac{1}{2} L i_{\infty}^2$ car $i_{\infty} = 0$ soit $E_{\text{bob}} = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{8}\right)^2$ (ici $i_{\infty} = \frac{E}{8}$ la loi de 2 mailles)

(2)

