

Consignes impératives :

- Les réponses devront être justifiées.
- Les questions NON NUMÉROTÉES, dont les résultats ne sont pas HOMOGÈNES, les expressions littérales pas ENCADRÉES, les applications numériques pas SOULIGNÉES, NE SERONT PAS CORRIGÉES.
- L'exercice 1 DOIT ÊTRE ABORDÉ en premier, SUR UNE FEUILLE SÉPARÉE, il sera ramassé en premier au bout de 30-45 minutes.

Problème 1 : Étude d'un circuit RLC série

Un générateur sinusoïdal alimente un circuit RLC constitué d'un condensateur de capacité $C = 0,15 \mu\text{F}$, d'une bobine réelle d'auto-inductance L et de résistance r inconnues, placés en série avec une résistance $R = 310 \Omega$. Le générateur est un générateur basse fréquence de résistance interne $R_g = 50 \Omega$ délivrant un signal sinusoïdal $e(t)$ de pulsation ω et d'amplitude E_m : $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

À toute grandeur réelle $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est associée une grandeur complexe que l'on notera :

$$u(t) = U_m \exp(j\omega t + j\varphi) = \underline{U}_m \exp(j\omega t), \text{ avec } j^2 = -1 \text{ et où } \underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi) \text{ est l'amplitude complexe.}$$

Ici, l'intensité circulant dans le circuit est $i(t) = \underline{I}_m \cos(\omega t + \varphi)$. Le montage est donné ci-dessous.

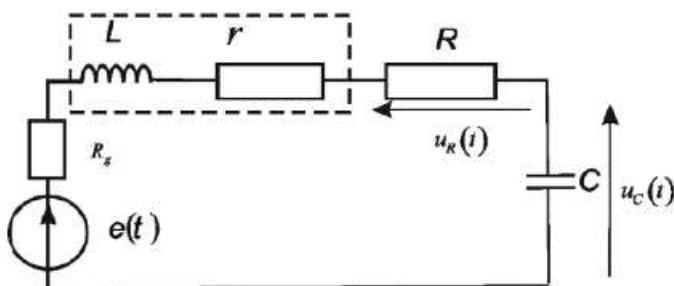


FIGURE 1 – Circuit étudié

Partie A - Étude de la tension aux bornes du condensateur

On notera dans toute la suite R_{tot} la résistance totale du circuit : $R_{\text{tot}} = R + r + R_g$.

1. Rappeler les expressions des impédances complexes de la bobine, du résistor et du condensateur, puis déterminer l'impédance complexe \underline{Z} du circuit.
2. En exploitant le comportement limite des composants du circuit à haute et basse fréquence, déduire qualitativement le comportement de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur en haute et en basse fréquence.
3. Exprimer l'amplitude complexe \underline{U}_{cm} associée à la tension aux bornes du condensateur en fonction des caractéristiques des composants puis sous la forme canonique :

$$\underline{U}_{cm} = \frac{A}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

Exprimer A , ω_0 et Q en fonction des données du problème.

4. En déduire l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur U_{cm} en fonction de ω , Q , ω_0 et E_m , puis en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, Q et E_m .

5. On montre que la tension $U_{cm}(x)$ passe par un extremum pour $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > Q_{\min}$ avec $Q_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire la pulsation ω_r de résonance. La comparer à ω_0 .
6. Exprimer $U_{cm}(\omega = \omega_0)$ en fonction de Q et E_m .
7. On a tracé ci-dessous les courbes de U_{cm}/A en fonction de x pour les valeurs de Q suivantes : 1/10, 2 et 10. Commenter l'allure de celles-ci et attribuer à chaque courbe (1, 2 et 3) son facteur de qualité.

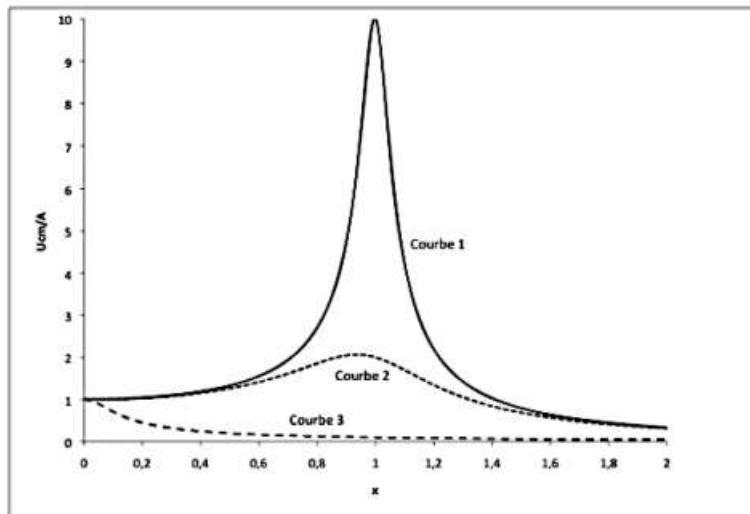


FIGURE 2 – Évolution de la tension aux bornes du condensateur

Partie B - Étude de l'intensité

1. Expliciter l'impédance \underline{Z} du circuit de la figure 1 et l'écrire sous la forme : $\underline{Z} = R_0 \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$
Préciser R_0 en fonction des résistances du circuit.
2. Exprimer l'amplitude complexe I_m associée à l'intensité du courant traversant le circuit en fonction de R_0 , ω , Q , ω_0 et E_m .
3. En déduire que l'amplitude de l'intensité $I_m(\omega)$ peut se mettre sous la forme :

$$I_m(\omega) = \frac{A'}{\sqrt{1 + B' \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

Préciser A' et B' en fonction de Q , E_m et R_0 .
4. Montrer que $I_m(\omega)$ présente un extremum pour $\omega = \omega'_r$. Préciser ω'_r et $I_{max} = I_m(\omega'_r)$.
5. Définir la bande passante. On admettra que la largeur de la bande passante en pulsation est $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.
6. On donne ci-dessous les graphes de $I_m(f)$ et $U_{cm}(f)$ où f est la fréquence du générateur.
L'échelle de gauche est celle de U_{cm} , celle de droite est celle de I_m . Identifier, en justifiant votre choix, les courbes $I_m(f)$ et $U_{cm}(f)$ parmi les courbes (1) et (2).
7. Déterminer à partir de ces courbes : l'amplitude de la tension du générateur E_m , la fréquence propre f_0 , I_{max} , les limites de la bande passante en intensité ainsi que le facteur de qualité Q du circuit de deux façons.

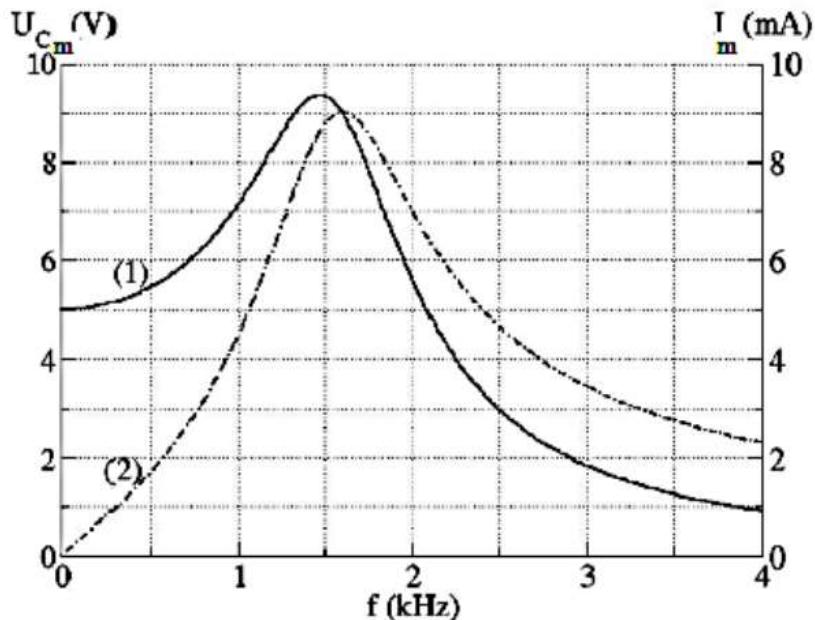


FIGURE 3 – I_m et U_{cm} en fonction de la fréquence du générateur

8. En déduire les valeurs de r et de L .

Partie C - Utilisation d'une autre bobine

Dans les questions qui suivent, on utilise une bobine différente dont les grandeurs caractéristiques sont L' et r' .

1. On note ϕ l'avance de phase (ou encore déphasage) de $i(t)$ par rapport à $e(t)$ ainsi que celle ϕ' de $u_C(t)$ par rapport $e(t)$. Préciser les valeurs de $\phi(\omega_0')$ ainsi que $\phi'(\omega_0')$ avec ω_0' la nouvelle pulsation propre du circuit.
2. Comment peut-on accéder expérimentalement à la mesure de $i(t)$ avec un oscilloscope ? Faire un schéma électrique du montage et représenter les branchements de l'oscilloscope.
3. À l'aide d'un oscilloscope, on mesure la tension $e(t)$ sur la voie CH1 et la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor de résistance R sur la voie CH2. On fait varier la fréquence du générateur sinusoïdal et on constate que la voie CH2 passe par un maximum. Interpréter la présence de ce maximum aux bornes de R (une simple justification en une seule phrase est attendue).

On se place désormais à cette fréquence.

4. Les deux oscillogrammes suivants ont été enregistrés, dans les conditions de la question précédente, l'un pour la voie CH2 aux bornes de C , l'autre pour la voie CH2 aux bornes de R en gardant $e(t)$ sur la voie CH1.
 - a) Déterminer le déphasage entre la voie CH1 et la voie CH2 pour chacun des oscillogrammes.
 - b) Préciser, en justifiant votre choix, à quel composant correspond chacun des oscillogrammes.

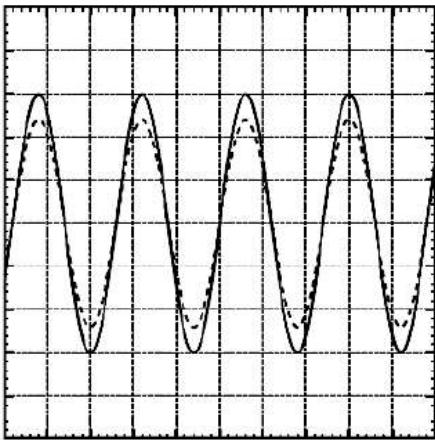


FIGURE 4 – Oscillogramme (a) :
voie CH1 en traits pleins (2V/div) ;
voie CH2 en pointillés (2V/div).
Calibre temporel : 0,5 ms/div.

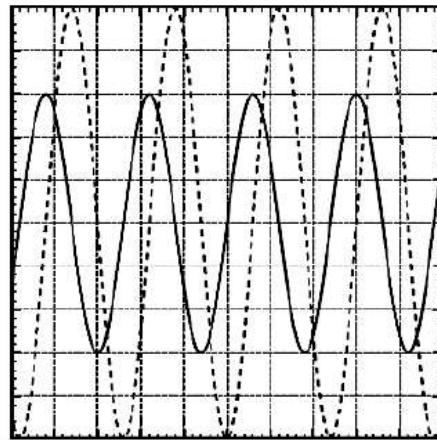


FIGURE 5 – Oscillogramme (b) :
voie CH1 en traits pleins (2V/div) ;
voie CH2 en pointillés (4V/div).
Calibre temporel : 0,5 ms/div.

5. En déduire les valeurs L' et r' de la nouvelle bobine.

Partie D - Étude en régime transitoire

On alimente désormais le circuit avec une tension continue E et l'on attend que le régime permanent soit établi. On reprend le circuit avec la bobine (r'', L'') . On ne prend plus en compte la résistance interne R_g du GBF puisqu'on le remplace par une source de tension continue.

1. Préciser lorsque le régime permanent est atteint les valeurs de i_∞ , $u_{L\infty}$, $u_{R\infty}$ et $u_{C\infty}$.

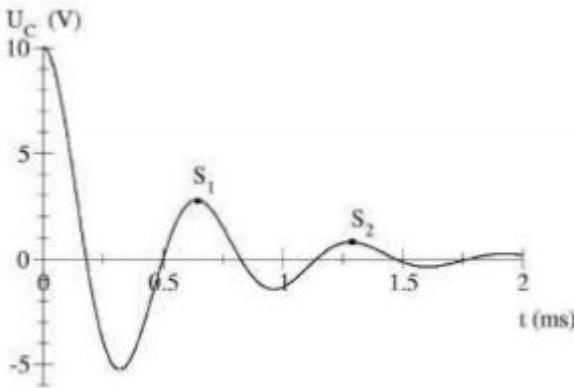
Une fois le régime permanent atteint, on remplace l'alimentation (le générateur) par un fil. On étudie donc la décharge d'un condensateur de capacité $C = 0,15 \mu\text{F}$ dans une bobine d'auto-inductance L'' et de résistance interne r'' inconnues placées en série avec une résistance R variable.

2. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $u_c(t)$ et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q'} \frac{duc}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

où on exprimera ω_0 et Q' , le facteur de qualité du circuit, en fonction des données du problème.

3. Rappeler les relations de continuité à l'intérieur d'une bobine et d'un condensateur. En déduire les valeurs $u_c(0)$ et $du_c/dt(0)$.
4. Comme le montre le graphe ci-dessous, on se trouve en régime pseudo périodique. Montrez que ceci n'est possible que si la résistance R est inférieure à une valeur maximale que l'on explicitera en fonction de L'' , r'' et de C .



	S_1	S_2
Tension en V	2,73	0,73
Date en ms	0,65	1,29

5. La solution physique s'écrit sous la forme $u_c(t) = e^{-\lambda t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t]$. Préciser les expressions de λ et ω en fonction de ω_0 et Q' . Préciser les valeurs des constantes A et B.
6. On donne les valeurs des deux premiers maxima pour ($t \neq 0$) (tableau ci-dessus).

Donnez la valeur expérimentale de la pseudo-période T et de la pseudo-pulsation ω .

On pose $\delta = \ln \left(\frac{u_1}{u_2} \right)$ le décrément logarithmique avec $u_1(t) = u_c(t)$ et $u_2(t) = u_c(t+T)$.

Montrer que $\delta = \omega_0 T / 2Q'$. En déduire l'expression de Q' en fonction de δ .

On donne $\delta = 1,28$ et $\left(\frac{\pi}{\delta} \right)^2 \simeq 6$. Évaluer Q' et ω_0 .

7. À quelle condition peut-on assimiler la pseudo-période à la période propre ? Cette approximation est-elle vérifiée dans le cas étudié ?

On prendra $R = 215 \Omega$.

8. Trouvez les valeurs numériques de L'' et de r'' . A-t-on bien $R < R_{\max}$?

Problème 2 : Le stabilisateur d'image

Un des problèmes récurrents et que connaissent tous les photographes, professionnels ou amateurs, est le "bougé" qui se produit lorsqu'une photographie est prise alors que le photographe est en mouvement. Le résultat est une image floue. Une des possibilités pour éviter ce phénomène consiste à augmenter la vitesse (diminuer la durée d'exposition) ce qui n'est pas toujours possible.

Le premier système stabilisateur d'image a été inventé par Garrett Brown en 1972 et ne s'appliquait qu'aux caméras. Il était donc destiné aux professionnels du cinéma. À partir des années 2000, différents systèmes furent adaptés aux appareils photos.

Ce problème s'intéresse au fonctionnement d'un appareil capable de mesurer les mouvements que le photographe communique (volontairement ou non) au boîtier de l'appareil photo lors d'une prise de vue.

On considère un oscillateur mécanique (figure 1) constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 dont l'extrémité supérieure est fixée sur la face supérieure horizontale d'une boîte. À l'extrémité inférieure du ressort est accrochée une plaque de masse m .

Ce système peut constituer un accéléromètre. Il pourra donc mesurer les accélérations de la boîte (qui modélise un appareil photo par exemple). On négligera d'éventuels mouvements autres que celui de translation verticale. On supposera le référentiel terrestre galiléen et on note g la norme de l'accélération de la pesanteur.

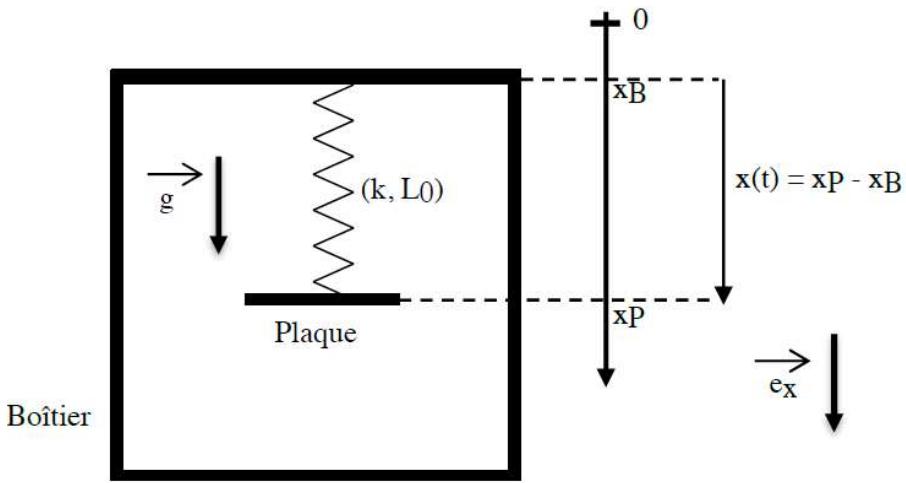


Figure 1 - Schéma simplifié d'un accéléromètre

Les différents éléments sont repérés par leur position sur un axe vertical descendant d'origine 0 :

- Le haut du boîtier par son abscisse x_B (on prendra $x_B = 0$ lorsque le boîtier est immobile dans le référentiel terrestre) ;
- La plaque par son abscisse x_P .

1. En supposant que la boîte et la plaque sont immobiles, exprimer la longueur x_{eq} du ressort à la position d'équilibre dans ces conditions, en fonction de m , g , k et L_0 .

Par la suite, on étudie le mouvement de la plaque par rapport à la boîte dans le cas où celle-ci est elle-même en mouvement par rapport au référentiel terrestre. On note $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x = a(t)\vec{e}_x$, l'accélération de la boîte par rapport au sol (lié au référentiel terrestre).

On note $x(t)$ la position instantanée de la plaque par rapport à B, dans le référentiel de la boîte, et l'on note $x_P(t) = x(t) + x_B(t)$ la position de la plaque dans le référentiel terrestre où l'on raisonnera.

Au cours de son mouvement dans la boîte, la plaque est soumise également à des frottements visqueux, modélisables par une force : $\vec{f} = -\alpha(\dot{x}_P - \dot{x}_B)\vec{e}_x$ où α est un coefficient strictement positif.

2. a) Écrire la deuxième loi de Newton appliquée à la plaque dans le référentiel terrestre.

- b) Montrer que $x(t) = x_P - x_B$ obéit à une équation différentielle du type $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t) + A$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ et où A est une constante et $f(t)$ une fonction du temps toutes deux à exprimer.

On considère que la boîte est soumise à une accélération sinusoïdale $a(t) = A_m \cos(\omega t)$ d'amplitude A_m , de pulsation ω et de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$. On admet avoir atteint le régime sinusoïdal forcé et que le déplacement par rapport à la position d'équilibre est de la forme $X(t) = x(t) - x_{eq} = \operatorname{Re}[X_m e^{j(\omega t + \phi)}]$ avec $j^2 = -1$. X_m est un réel positif ou nul. On notera \underline{X} la grandeur complexe associée à X .

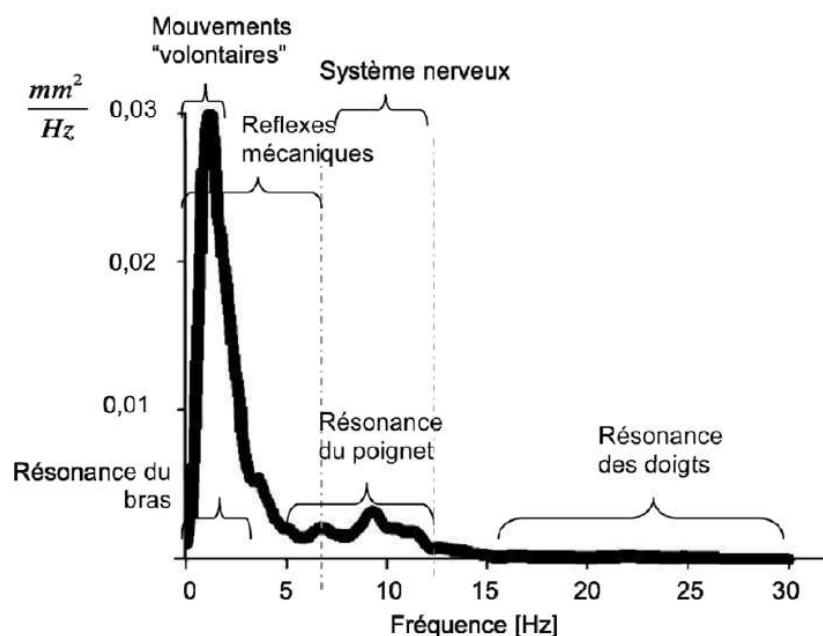
3. a) Donner l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$.

- b) Montrer alors que $|X_m| = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$

4. a) Montrer qu'il existe un domaine de fréquences pour lesquelles la réponse $X(t)$ est proportionnelle à l'accélération $a(t)$.
- b) Établir la relation entre $X(t)$ et $a(t)$ en fonction de k et m dans ce domaine de fréquences.
5. Le document 2 est une synthèse de l'analyse spectrale du tremblement de la main (pour un être humain) ainsi que de ses origines.

Il représente la répartition fréquentielle de l'amplitude des mouvements. L'unité de l'axe des ordonnées n'a pas d'importance pour la compréhension du graphique.

Pour un accéléromètre fonctionnant selon le principe décrit dans ce problème, on suppose que $Q = 5$ et $\omega_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. À l'aide de ces valeurs et du document, indiquer si la condition évoquée en 4) est remplie pour cet accéléromètre.



Document 2 – Analyse spectrale du tremblement humain

Source : Contribution à des architectures de stabilisation d'images basées sur la perception visuelle et la physiologie du tremblement humain, Fabien Gavant (2012, Thèse de doctorat, Université de Grenoble)