Ondes stationnaires

Ce qu'il faut connaître

Formules de trigonométrie

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p \times \cos q = \frac{1}{2}(\cos(p+q) + \cos(p-q))$

- Les définitions des nœuds, ventres

Ce qu'il faut savoir faire

- Caractériser une onde stationnaire par l'existence de nœuds et de ventres.
- Exprimer les fréquences des modes propres connaissant la célérité et la longueur de la corde.
- Utiliser la propriété énonçant qu'une vibration quelconque d'une corde accrochée entre deux extrémités fixes se décompose en modes propres.
- Relier les notions sur les ondes stationnaires avec celles utilisées en musique.
- Décrire une onde stationnaire observée par stroboscopie sur la corde de Melde.
- Distinguer onde stationnaire et phénomène de battements

EC1 : Un petit air de guitare
Le doublement de fréquence d'un son correspond à un changement d'octave. La gamme tempérée divise l'octave en douze intervalles égaux appelés demi-tons. Les fréquence successives f_p des notes espacées de ces demi-tons vérifient la loi $f_p = 2^{p/12} f_9$ avec $p \in [1, 12]$. On donne la célérité c d'une onde dans la corde $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec μ la masse linéique de la corde et T sa tension. On s'intéresse à la corde 4 de la guitare, qui émet à vide la note Sol2.

Note	Do3	Do#	Ré	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Lab	La	Sib	Si	Do4
f(Hz)	261.5	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	493	523

1. Déterminer la fréquence émise par la corde à vide (fondamental), et sa tension (corde de longueur 63 cm , en acier de masse volumique $\rho_a = 7800$ kg m^{-3}, de diamètre $D = 0,55$ mm)
2. Quelle est la variation relative qui peut être tolérée sur la tension de la 4ème corde pour que la fréquence du fondamental correspondant ne varie pas de plus de cinq savarts (limite de séparation moyenne de l'oreille humaine) ?
3. Le guitariste déplace sa main sur une ou plusieurs cordes afin de faire varier la distance entre les extrémités fixes. De quelle distance déplace-t-il son doigt sur la 4ème corde pour passer du Sol2 au La 2 ?

Onde stationnaire

Une onde stationnaire est caractérisée par $\begin{cases}\text{des } \textbf{noeuds} \text{ de vibrations, points où l'amplitude de l'onde est nulle ;}\\ \text{des } \textbf{ventres} \text{ de vibrations, points où l'amplitude de l'onde est maximale.}\end{cases}$

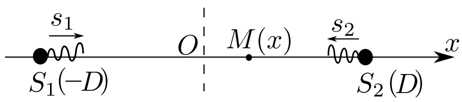
Son expression peut s'écrire comme le produit d'un terme spatial et d'un terme temporel

$$s(M,t) = s(x,t) = f(x)g(t).$$

Il y a **découplage** entre la coordonnées de temps et d'espace.

I. Superposition de deux ondes progressives *synchrones*

Soit deux ondes planes progressives harmoniques de même amplitude se propageant dans des sens différents et de pulsation ω . Les deux sources, sont de phase à l'origine nulle et sont distantes de D de l'origine du repère (en $-$D pour la source de s_1 et en $+$D pour la source de s_2).



Écrire les expressions des deux ondes se dirigeant vers O $\begin{cases} s_1(x,t) = \\ \\ s_2(x,t) = \end{cases}$

Ainsi l'amplitude totale dans le milieu peut s'écrire :
$s(M,t) = s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) =$

Il apparait un découplage entre les dépendances temporelle et spatiale. Ainsi il existe des point où l'amplitude de l'onde est nulle, et ce indépendamment du temps. Ces points sont appelés des noeuds.
⋆ **Détermination de la position des noeuds** : Les noeuds sont des points où l'amplitude de l'onde est toujours nulle :

⋆ **Détermination de la position des ventres** : Les ventres sont des points où l'amplitude de l'onde est maximale :

II. Réflexion d'une onde progressive

Lorsqu'une onde progressive rencontre une discontinuité dans le milieu de propagation, il se crée une onde réfléchie d'origine cette discontinuité. Ainsi on observe la superposition d'une onde dite incidente et d'une onde dite réfléchie :

$$s(M,t) = s_i(M,t) + s_r(M,t).$$

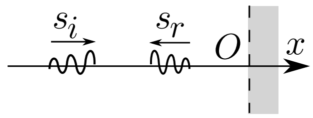
La célérité d'une onde progressive dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation, ainsi l'onde incidente et l'onde réfléchie ont la même célérité $c = \frac{k_i}{\omega_i} = \frac{k_r}{\omega_r}$. Si l'on considère des ondes planes progressives harmoniques 1D, l'onde présente dans le milieu s'exprime :

$$s(M,t) = s(x,t) = S_m\left(\cos\left(\omega_i t - k_i x + \phi_i\right) + r\cos\left(\omega_r t + k_r x + \phi_r\right)\right)$$

avec $r \in [0,1]$ le coefficient de réflexion.

1. Corde vibrante semi-infinie

Prenons l'exemple d'une corde vibrante attachée en $x = 0$.
Ce point ne se déplace pas : pour tout t,



$$s(0,t) = S_m\left(\cos\left(\omega_i t + \phi_i\right) + r\cos\left(\omega_r t + \phi_r\right)\right) = 0, \forall t$$

Ceci n'est possible que si $\begin{cases} r = 1 \\ \text{les pulsations sont égales } \omega_i = \omega_r \text{, donc les vecteurs d'onde aussi (car } k = \omega/c) \\ \phi_r = \phi_i \end{cases}$.

Le choix de l'origine des phases étant arbitraire on peut fixer $\phi_i = 0$

Superposition d'une onde incidente et réfléchie dans une corde vibrante

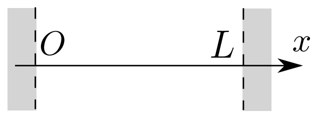
L'onde présente dans la corde s'exprime donc par

$$s(x,t) = S_m(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = 2S_m\sin(\omega t)\sin(kx).$$

On obtient une onde stationnaire, dont O est un des nœuds.

2. Modes de vibration de la corde de Melde

La corde de Melde est une corde vibrante **fixée à ses deux extrémités** (comme sur une guitare). La condition limite $s(0,t) = 0$ a déjà été utilisée pour déduire l'expression d'une onde stationnaire. Utilisons donc la seconde condition limite $s(L,t) = 0$ avec L la longueur de la corde pour déterminer les longueurs d'onde possibles :



Condition d'existence

Une onde stationnaire existe sur la corde de Melde si et seulement

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Ce sont les deux conditions aux limites qui conduisent à une quantification des modes de vibration

On peut réécrire les caractéristiques de l'onde ainsi :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}; \omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{L}; T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2L}{nc}.$$

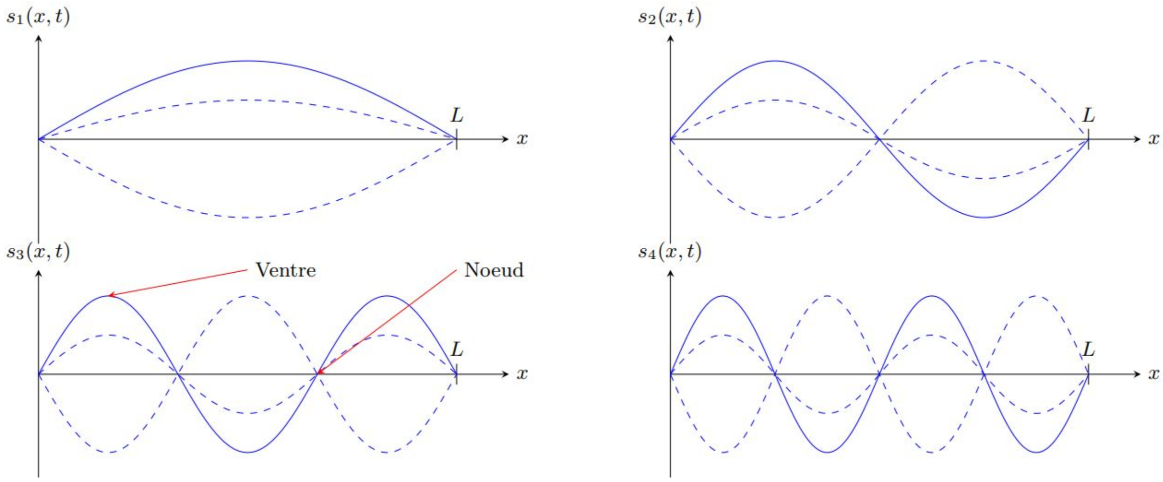
Modes de vibration de la corde de Melde

Les modes de vibration de la corde de Melde s'expriment

$$s_n(M,t) = s_n(x,t) = 2S_m \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- Un mode de vibration est une onde stationnaire harmonique : tous les points du système vibrent sinusoïdalement à la même fréquence, soit en phase soit en opposition de phase.
- Les modes de vibrations ont des pulsations multiples de la pulsation fondamentale ω_1.

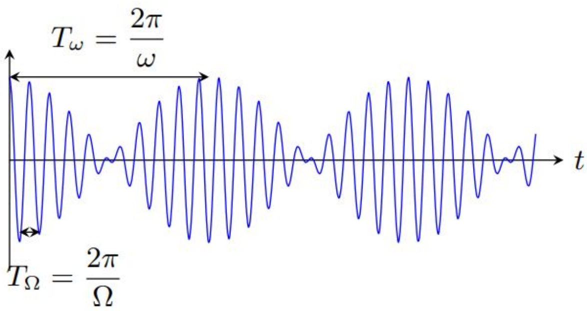
Ci-dessous, les 4 premiers modes de la corde de Melde :



3. Attention à ne pas confondre onde stationnaire et battement !

Dans le cas des battements (voir chapitre précédent)

- Il y a nécessairement **deux sources** (non synchrones)
- Il n'y a **ni noeuds ni ventres**
- Les "oscillations" de l'amplitude ont lieu en temps, et non en espace !



TD Ondes stationnaires

1 Corde excitée par un vibreur

Une corde délimitée par les abscisses $x = 0$ et $x = L$ est excitée en $x = 0$ par un vibreur. Celui-ci impose un déplacement vertical de l'extrémité gauche de la corde $z(t) = z_0 \sin(\omega t)$, où ω est la pulsation du vibreur et z_0 son amplitude. L'extrémité droite est fixée. On appelle $y(x,t)$ la hauteur de la corde par rapport à l'horizontale en x et à l'instant t.
1. Quelles conditions aux limites a-t-on en $x = 0$ et $x = L$?
On suppose que la vibration est de la forme $y(x,t) = A\sin(\omega t)\sin(kx + \psi)$, où A, ω, k et ψ sont des constantes réelles telles que $k = \frac{\omega}{c}$, où c est la vitesse de propagation de l'onde.
2. Quelle sorte d'onde est-ce ?
3. Trouver les valeurs des constantes A et ψ.
4. Pour quelles valeurs de k l'amplitude de la vibration devient-elle très grande ? Retrouver l'expression des modes propres de la corde de Melde.
5. Pourquoi l'amplitude diverge-t-elle ?

Rép : 1. $y(0,t) = z_0 \sin(\omega t); y(L,t) = 0$; onde stationnaire ; $\psi = -kL$; $A = \frac{z_0}{\sin(-kL)}$; ;L'amplitude diverge si $\sin(-kL) = 0$, i.e. $k_n = n\pi/L$ La vibration peut donc être non nulle même si l'excitation en $x = 0$ est nulle : on retrouve la corde de Melde. ; on a négligé les dissipations d'énergie (modèle de corde à revoir)

2 Tuyaux sonores

1/ Donner un ordre de grandeur de la célérité du son dans l'air ? Dans l'eau ? Dans un solide ?
On considère un tube de $1,0$ m rempli d'air fermé à ses deux extrémités par des parois. On fait vibrer l'une des parois de manière sinusoïdale avec un haut-parleur, l'autre restant immobile. On place dans le tube un microphone sensible à la surpression p induite par l'onde sonore. Le micro peut être déplacé sur toute la longueur du tube. On note c la vitesse du son.
2/ Ce système peut-il être le siège d'une onde de pression stationnaire ?
3/ Comment justifier simplement que les nœuds de pression correspondent à des ventres de vitesses de déplacement de l'air (et les ventres de pression à des nœuds de vitesse) ?
4/ Justifier que la surface du haut-parleur soit un nœud de pression et l'autre l'extrémité fermée un ventre.
5/ Dessiner les trois premiers modes propres de l'onde stationnaire de pression.
6/ Justifier simplement que les fréquences des modes propres sont :

$$f_n = (2n+1)\frac{c}{4L}$$

Maintenant, on enlève la paroi fixe, le tube est donc ouvert à une de ses extrémités (l'autre est toujours reliée à un haut-parleur qui la fait vibrer).
7/ Pourquoi a-t-on encore un système d'ondes stationnaires ?
8/ Justifier simplement que les fréquences des modes propres deviennent :

$$f_n = n\frac{c}{2L}$$

9/ Quelle longueur de tuyau faut-il choisir pour que la fréquence du fondamental soit un Do 4 . ($f = 523$ Hz) ?
Dans une flûte, un biseau met l'air en mouvement mais on peut considérer que les deux extrémités sont ouvertes.
10/ Dessiner les deux premiers modes propres et donner la fréquence des modes propres.