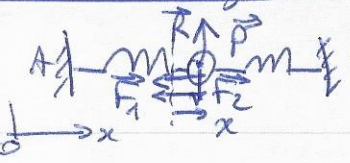


2^{de} Loi de Newton

2 ressorts horizontaux



PFD appliqué à Π dans RTSG (ref terrestre supposé galiléen), en proj sur Ox ($\vec{P}$ et $\vec{R}$ se compensent):

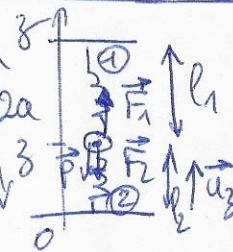
$$m\ddot{x} = F_1x + F_2x = -k(l_1 - l_0) + k(l_2 - l_0)$$

$$= -2kx$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0. \text{ Solut}^o \text{ générale: } x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

CI: à $t=0$, $v=0 \Rightarrow B=0$
 $x=x_0 \Rightarrow A=x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$

2 ressorts verticaux



PFD appliqué à Π dans RTSG:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

(Restez algébrique)

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -k(l_1 - l_0)(-\vec{u}_3) \\ \vec{F}_2 = -k(l_2 - l_0)\vec{u}_3 \\ \vec{P} = -mg\vec{u}_3 \end{cases}$$

avec $\begin{cases} l_1 = 2a - z \\ l_2 = z \end{cases}$ (dessin...)

Soit en proj sur Oz , à l'équilibre:

$$0 = k(2a - z_{eq} - l_0) - k(z_{eq} - l_0) - mg$$

$$\Rightarrow z_{eq} = a - \frac{mg}{2k}$$

Vérificat^o de bon sens:

$$- z_{eq} < a \quad (\text{ouf})$$

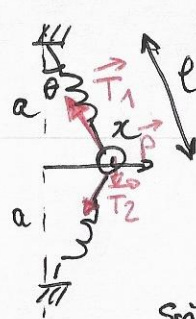
$$- z_{eq} = a \text{ si pas de poids (reouf)}$$

Soit $\begin{cases} l_{1eq} = a - \frac{mg}{2k} \\ l_{2eq} = a + \frac{mg}{2k} \end{cases}$

2) Hors équilibre, $m\ddot{z} = k(2a - z - l_0) - k(z - l_0) - mg$
 $= k(2a - 2z) - mg$
 $= -2k(z - a + \frac{mg}{2k})$ *astuce...*

Soit $\ddot{z} + \frac{2k}{m}(z - z_{eq}) = 0 \Rightarrow \text{oscillations \textit{v} autour de l'équilibre.}$

3)



On a alors $l_1 = l_2 = a$

on a $T_1 = k(l - l_0) = k(\sqrt{a^2 + x^2} - l_0) = T_2$
 par symétrie. (normes!)

Donc $T_1x = T_2x = -T_1 \sin \theta = -T_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

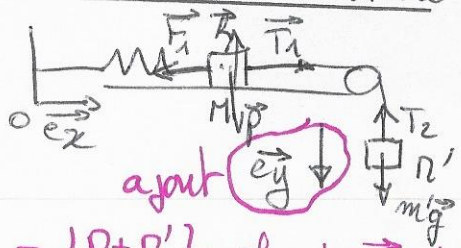
Soit $T_1x = T_2x = -k(\sqrt{a^2 + x^2} - l_0) \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -k(x - \frac{l_0 x}{\sqrt{a^2 + x^2}})$

Pour x petit, DL: $T_1x \approx -kx(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}) \approx -kx(1 - \frac{l_0}{a})$

Le PFD appliqué à Π dans RTSG donne en proj sur Ox :

$ma_x = -2T_1x \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m}(1 - \frac{l_0}{a})x = 0$, oscillations à la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}(1 - \frac{l_0}{a})}$

Mouvement d'un labo



Quel système choisir ?

- $\{m\} \rightarrow$ alors T_1 inconnu, mais égal à T_2 , à déterminer en appliquant le PFD à m' $\Rightarrow$ ok.

- $\{m+m'\}$: plus de T_1 et T_2 , mais des forces au niveau de la poulie inconnues $\Rightarrow$ non.

- PFD sur m' ds BSTG : $m'\ddot{y} = m'g - T_2 \Rightarrow T_2 = m'(g - \ddot{y})$ selon Oy
- PFD sur m ds BSTG : $m\ddot{x} = -k(x - l_0) + T_1$ (1) selon Ox
- Ficelle inextensible $\Rightarrow v_m = v_{m'}$ (en normes) $\Rightarrow \ddot{y} = \ddot{x}$ (Δ circulation de $\vec{v}$)

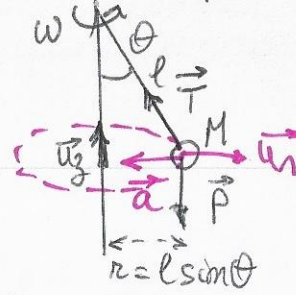
Donc (1) $\Leftrightarrow (m+m')\ddot{x} + kx = kl_0 + m'g$

En posant $x_{eq} = l_0 + \frac{m'g}{k}$, il vient $\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_{eq}) = 0$ (2) avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+m'}}$

(2) est 1 équation du 2^d ordre avec 2^d membre : $\heartsuit$

- solution particulière de l'éq complète : $x_p = x_{eq}$
- solution générale de l'éq homogène : $x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$
- $\Rightarrow$ solution générale de (2) : $x = x_{eq} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$
- On obtient A et B par les CI (sur la sol gale de l'éq complète)
- $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
- $x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0 - x_{eq}$
- $\Rightarrow x = x_{eq} + (x_0 - x_{eq}) \cos \omega_0 t$

Pendule conique



1) Si θ, ω constants, m suit 1 traj circulaire uniforme de rayon r
 $\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 r \vec{u}_r$

⚠ Densin! ici $\omega \neq \dot{\theta}$!

PFD appliqué à m ds BSTG, ds le

repère $\vec{u}_r, \vec{u}_z$:

$$\begin{cases} -m\omega^2 l \sin \theta = -T \sin \theta & (1) \\ 0 = T \cos \theta - mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow m\omega^2 l = \frac{mg}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{g}{l\omega^2}$ (2)

2) (2) n'a de solution que si $\cos \theta \leq 1 \Leftrightarrow \omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

3) A ω_1 , le fil inférieur est à tension encore nulle, les résultats de 1) sont encore valables. la géométrie donne $\cos \theta = \frac{a}{l} \Rightarrow \frac{a}{l} = \frac{g}{l\omega_1^2}$ soit $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}}$

4) le PFD donne ici

$$\begin{cases} -m\omega^2 l \sin \theta = -(T_1 + T_2) \sin \theta & (\vec{u}_r) \\ 0 = (T_1 - T_2) \cos \theta - mg & (\vec{u}_z) \end{cases}$$

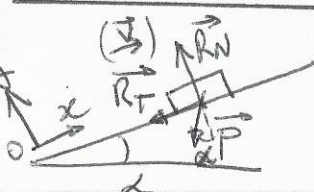
avec $\cos \theta = \frac{a}{l}$ (géométrie)

$\Rightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 = m\omega^2 l & (a)+(b) \\ T_1 - T_2 = mg \frac{l}{a} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m l (\omega^2 + \omega_1^2) \\ T_2 = \frac{1}{2} m l (\omega^2 - \omega_1^2) \end{cases}$

$\Rightarrow T_1 = 2T_2$ pour $\omega^2 + \omega_1^2 = 2(\omega^2 - \omega_1^2) \Rightarrow \omega = \sqrt{3}\omega_1$

Frottement solide 1) PFD appliqué à la caisse dans RTSG



$$\begin{cases} m\ddot{x} = -R_T - mg \sin \alpha & (1) \\ m\ddot{y} = 0 = R_N - mg \cos \alpha \end{cases}$$

pas de décollement

La caisse est en mouvement coulomb $R_T = f R_N = f mg \cos \alpha$

Donc (1) donne $\ddot{x} = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha)$

$$\xrightarrow{+CI} \dot{x} = -g t (f \cos \alpha + \sin \alpha) + v_0$$

$$\xrightarrow{+CI} x = -\frac{1}{2} g t^2 (f \cos \alpha + \sin \alpha) + v_0 t$$

La caisse s'arrête pour $\dot{x} = 0 \Rightarrow t_a = \frac{v_0}{g(f \cos \alpha + \sin \alpha)}$

Elle a alors parcouru $x(t_a) = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(f \cos \alpha + \sin \alpha)} + \frac{v_0^2}{g(f \cos \alpha + \sin \alpha)}$

$$\text{soit } x(t_a) = D = \frac{v_0^2}{2g(f \cos \alpha + \sin \alpha)}$$

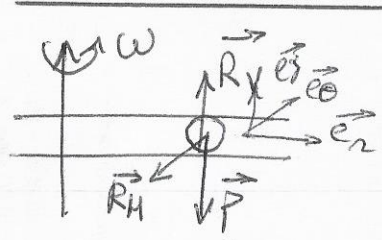
2) La caisse peut rester immobile si, en supposant l'immobilité, $R_T \leq f R_N$. (R_T à déterminer) -

Alors (1) donne $R_T = mg \sin \alpha \leq f mg \cos \alpha$

$$\text{soit } \tan \alpha \leq f$$

Si on même raisonnement qu'en 1, avec $\vec{R}_T$ vers le haut $\Rightarrow \ddot{x} = -g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$, mais à accélération constante

Bille dans un tube en rotation



1) Le tube ne crée pas de frottement $\Rightarrow R_{\text{tube}} \perp \text{mvt}$

$\Rightarrow \vec{R}_{\text{tube}}$ peut avoir 2 composantes $\vec{R}_V$ et $\vec{R}_H$!

Le PFD appliqué à la bille du RTSG donne ds le repère cylindrique :

$$m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0 \quad (\vec{u}_r) \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = R_H \quad (\vec{u}_\theta) \quad (2)$$

$$m\ddot{\vec{z}} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{R}_V$$

géométrie

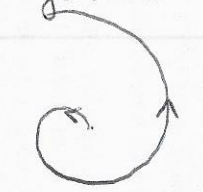
2) (1) $\Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0$ Eq du 2^d ordre, sol gén $r = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t$

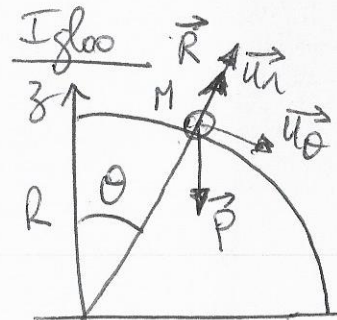
donc $\dot{r} = A \omega \sinh \omega t + B \omega \cosh \omega t$.

$$\text{or CI: } \begin{cases} \dot{r}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ r(0) = r_0 \Rightarrow A = r_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{r = r_0 \cosh \omega t}$$

$$3) (2) \Rightarrow \underline{R_H = 2m \dot{r} \omega = 2m r_0 \omega^2 \sinh \omega t}$$

4) La trajectoire ressemble à 1 spirale logarithmique





1) PFD appliqué à Ω ds RTSG, repère cylindrique.

a) Mouvement circulaire de rayon R , en proj sur $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$, le PFD donne

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R(1)(\vec{u}_r) \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \quad (2) \quad (\vec{u}_\theta) \end{cases}$$

Astuce
Classique

b) $(2) \times \dot{\theta} \Rightarrow R\ddot{\theta} = -g\sin\theta$, Par integration entre $t=0$ et t , il vient:

$$\left[\frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 \right]_{\dot{\theta}=0}^{\dot{\theta}} = \left[-g \cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta} \quad \triangle \text{ aux conditions initiales}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 = g(1 - \cos\theta) \Rightarrow \left[\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos\theta) \right]$$

(Et non pas $\frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 = -g \cos\theta !!!$)

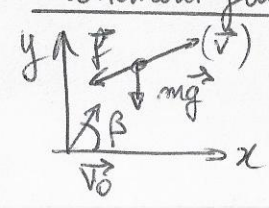
c) (1) donne $R = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 = m(g\cos\theta - 2g(1 - \cos\theta))$
 $\Rightarrow R = mg(3\cos\theta - 2)$

Ω quitte la sphere si $R=0 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_1 = \text{Arccos} \frac{2}{3}$

d) Alors $\vec{v} = R\dot{\theta}_1 \vec{e}_\theta$, avec $\dot{\theta}_1^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos\theta_1) = \frac{2g}{3R}$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \vec{e}_\theta = \sqrt{\frac{2gR}{3}} (\cos\theta_1 \vec{e}_x - \sin\theta_1 \vec{e}_y)$$

Frottement fluide en $\vec{v}$. 1) PFD appliqué à Ω dans RTSG:

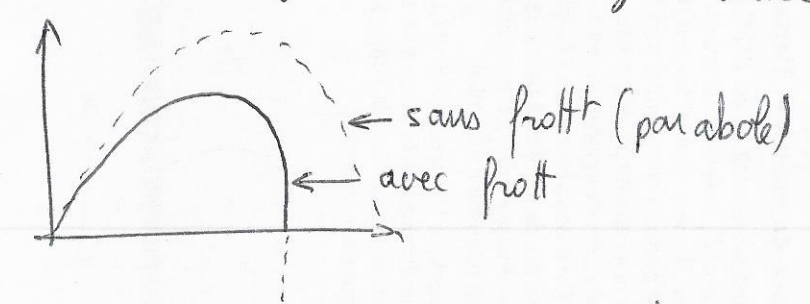


$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v} + m\vec{g} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g},$$

avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

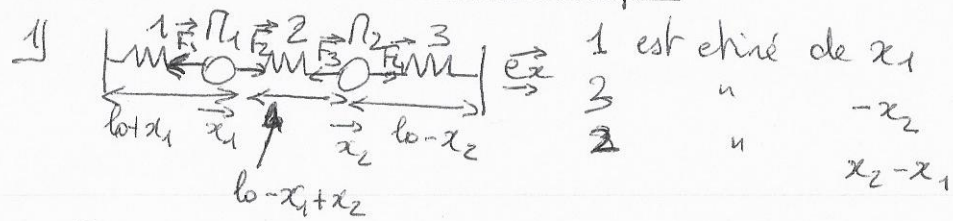
2) En proj $\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\dot{y}}{\tau} = g \end{cases} \xrightarrow[\text{+CI}]{\text{int}}$ $\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\beta e^{-t/\tau} \\ \dot{y} = -g\tau + (v_0 \sin\beta + g\tau)e^{-t/\tau} \end{cases}$

3) Par integration $\begin{cases} x = v_0 \cos\beta \tau (1 - e^{-t/\tau}) \\ y = -g\tau t - \tau(v_0 \sin\beta + g\tau)e^{-t/\tau} + C \end{cases}$
 et $y(0)=0 \Rightarrow C = \tau(v_0 \sin\beta + g\tau) \Rightarrow y = -g\tau t + \tau(v_0 \sin\beta + g\tau)(1 - e^{-t/\tau})$
 pour $t \rightarrow \infty$ $\begin{cases} x \rightarrow v_0 \tau \cos\beta \\ y \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{tangente verticale}$



4) $v_y = 0 \Leftrightarrow -g\tau + (v_0 \sin\beta + g\tau)e^{-t_m/\tau} = 0$
 $\Leftrightarrow e^{-t_m/\tau} = \frac{g\tau}{v_0 \sin\beta + g\tau}$
 $\Rightarrow t_m = \tau \ln \left(1 + \frac{v_0 \sin\beta}{g\tau} \right)$

Modes propres de 2 oscillateurs couplés



R_1 subit $\vec{F}_1 = -k_1 x_1 \vec{e}_x$
 $\vec{F}_2 = k_2(x_2 - x_1) \vec{e}_x$

R_2 subit $\vec{F}_3 = -k_2(x_2 - x_1) \vec{e}_x$
 $\vec{F}_4 = -k_1 x_2 \vec{e}_x$

(Prendre "dans sa tête" $x_1=0$, ou $x_2=0$ pour vérifier les signes des tensions avec votre bon sens)

2] • $m \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$ (PFD pour R_1)

$\Leftrightarrow m \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$ (1)

• $m \ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2(x_2 - x_1)$ (PFD pour R_2)

$\Leftrightarrow m \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 - k_2 x_1 = 0$ (2)

3] (1)+(2) $\Rightarrow m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k_1(x_1 + x_2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\ddot{u} + \frac{k_1}{m} u = 0 \right] (3) (u = x_1 + x_2)$

(1)-(2) $\Rightarrow m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k_1 + 2k_2)(x_1 - x_2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\ddot{v} + \frac{k_1 + 2k_2}{m} v = 0 \right] (4)$

4] ab Alors $\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0 \end{cases}$

(3) a pour solut^o générale $u = A \cos \omega_s t + B \sin \omega_s t$

Avec les CI, $u=0$. ($A=B=0$)

De m^{me} $v(t) = A' \cos \omega_A t + B' \sin \omega_A t$

Avec les CI, $v = 2a \cos \omega_A t$.

Donc $\begin{cases} x_1 = \frac{u+v}{2} = a \cos \omega_A t \\ x_2 = \frac{u-v}{2} = -a \cos \omega_A t \end{cases} \quad x_2(t) = -x_1(t)$

5] alors $\begin{cases} u(0) = 2a \\ \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0 \end{cases}$
 $v(0) = 0$

On trouve de m^{me} : $u = 2a \cos \omega_s t$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \cos \omega_s t \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$

les 2 masses se déplacent "en bloc" $\Rightarrow$ le 2^e ressort a la longueur $l_0 = l_0 + \Delta l$ $\Rightarrow$ pas de k_2 dans ω_s