DM Énergie : Oscillateur mécanique (Mines-Ponts 2023)

On considère un ressort d'extrémités N et M, de raideur k, de longueur à vide l_0 et de longueur $l(t) = NM$ à un instant t quelconque. Ce ressort est suspendu verticalement par son extrémité N à un point O fixe d'un support immobile dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}$. À son extrémité M est accroché un point matériel P de masse m. L'extrémité N (resp. M) du ressort se confond avec le point O (resp. P) (cf. figure 1). On suppose que le mouvement du point matériel P reste vertical : en se repérant dans le système de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ d'origine O, le point P appartient à la droite ($O, \vec{u}_z$).

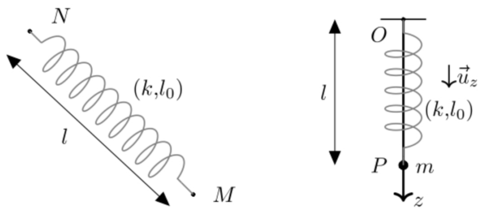

Figure 1 – Ressort et oscillateur vertical

Dans tout le problème, le ressort reste dans son domaine élastique de fonctionnement associé à une force de rappel proportionnelle à son allongement. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme égal à $\vec{g} = g\vec{u}_z$ avec $g > 0$. On néglige toute forme de frottement. On suppose tout d'abord que le ressort a une masse m_r nulle.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{\mathrm{p,k}}$ du ressort dont on prendra l'origine lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On exprimera $\mathcal{E}_{\mathrm{p,k}}$ en fonction de k, l_0 et l.

2. Établir, en fonction de m, g et l, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{\mathrm{p,p}}$ du point matériel P dont on prendra l'origine en O.

3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ du point matériel P de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction notamment de $l(t)$.

4. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

5. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L > 0$. On fera apparaître une pulsation ω_0.
Quelle condition doit-on imposer à L pour que le point matériel P ne heurte pas le support fixe où est suspendu le ressort ? On exprimera cette condition en fonction de k, l_0, m et g. Qualifier le mouvement observé : tracer l'allure de $l(t)$ en fonction de t. Donner l'expression de la période T_0 du mouvement du point matériel P et calculer sa valeur numérique pour $k = 0,300 \times \pi^2 \simeq 2,96$ N$\cdot$ m^{-1} et $m = 300$ g.

Dans les questions suivantes, on tient compte de la masse m_r non nulle du ressort. On suppose que l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{\mathrm{p,k}}$ du ressort établie à la question **1** n'est pas modifiée. Par contre, son énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{\mathrm{p,p}}$ est affectée par cette modification. Pour la déterminer, on suppose que, quelque soit sa longueur l, la masse m_r du ressort est uniformément répartie sur toute sa longueur l et que, pour tout z compris entre 0 et l, la tranche élémentaire de ressort comprise entre z et $z + dz$ possède, dans le référentiel $\mathcal{R}$, une vitesse proportionnelle à z. On conserve les mêmes origines que précédemment pour les énergies potentielles.

6. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{\mathrm{p,p}}$ associée au ressort en fonction de m_r, g et l.
Indication (pas dans l'énoncé original) : découper le ressort en éléments de longueur dl. Exprimer leur masse dm, leur énergie potentielle de pesanteur dE_{pp} et énergie cinétique dE_c élémentaires, puis les sommer (intégrale).

7. Établir l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{c}$ du ressort en fonction de m_r et l.

8. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ du système constitué par le point matériel P de masse m et le ressort de masse m_r dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction de $m, m_\mathrm{r}, k, g, l_0$ et l.
Réponse (pas dans l'énoncé original) : $\mathcal{E}_\mathrm{m} = (m/2 + m_r/6)\dot{l}^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - gl(m + mr/2)$

9. Établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel P vérifiée par $l(t)$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Commenter.

10. Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente en supposant qu'à $t = 0$, le point matériel P est lâché sans vitesse initiale de la position $l(t = 0) = L$. On fera apparaître une pulsation ω_1. Qualifier le mouvement observé en supposant que le point matériel P ne heurte pas le support fixe.
Déterminer l'expression de la période T_1 du mouvement du point matériel en fonction de T_0, m et m_r puis calculer sa valeur numérique pour $k = 0,300 \times \pi^2 \simeq 2,96$ N$\cdot$ m^{-1}, $m = 300$ g et $m_\mathrm{r} = 36,0$ g (on pourra utiliser l'approximation $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$).

11. Quelle condition doit satisfaire m_r pour que l'écart relatif entre T_0 et T_1 ne dépasse pas 1% ? On fera l'application numérique dans les conditions de la question précédente.