Énergie en mécanique

1 Comparaison entre méthode énergétique et PFD

Reprendre les exercices du TD précédent marqués d'une étoile avec une méthode énergétique.
Il suffira le plus souvent d'établir l'équation du mouvement, le reste des réponses étant inchangé.

2 Coefficient de frottement solide (*)

Une masse M posée sur un plan horizontal est lancée avec une vitesse initiale v_0. On note f le coefficient de frottement solide entre le plan et la masse. Calculer la distance d parcourue par la masse avant de s'arrêter.

Rép : $d = \dfrac{v_0^2}{2fg}$

3 Potentiel de Morse (*)

L'énergie potentielle d'interaction entre les atomes d'une molécule diatomique est donnée par le potentiel de Morse :

$$E_p(r) = A\left[1 - \exp\left(-a\left(r - r_0\right)\right)\right]^2$$

r est la distance variable entre les atomes, a, r_0 et A des constantes positives.
1) Tracer l'allure de $E_p(r)$
2) Donner l'expression des forces d'interaction moléculaires f(r). Pour quelle valeur de r l'équilibre s'établit-il ? Discuter de la stabilité de cet équilibre.
3) Un opérateur sépare, à vitesse nulle (c'est à dire infiniment lentement) les deux atomes, initialement à l'équilibre, jusqu'à r = $+\infty$. Calculer le travail fourni par l'opérateur. Quelle est sa signification physique ?

Rép : $\vec{F} = -2Aae^{-a(r-r_0)}(1 - e^{-a(r-r_0)})\vec{u}_r$; $r_{eq} = r_0$; $\dfrac{d^2E_p}{dr^2}(r = r_0) = 2a^2A > 0$: stable ; $\omega = a\sqrt{\dfrac{2A}{m}}$; $W_{op} = A$

4 Ralentissement d'une voiture(**)

Une voiture de masse $m = 1000$ kg est équipée d'un moteur d'une puissance maximale $\mathrm{P_M} = 50$ kW. Avec cette puissance, la voiture atteint la vitesse maximale $V_{Max} = 144$ km $\cdot$ h^{-1}. En supposant que les forces de frottement que subit la voiture sont essentiellement dues à l'air, et de la forme $f = -\mathrm{kv}^2$ (v étant la vitesse, et k une constante), calculer le temps τ nécessaire pour que, en roue libre (moteur débrayé), la voiture ralentisse de sa vitesse maximale jusqu'à la moitié de cette valeur.
Quelle est la distance d parcourue pendant ce temps ? Quelle distance la voiture parcourra-t-elle avant de s'arrêter ? Que pensez vous de ce résultat ?

Rép : $k = 0.78$ S.I., séparer les variables : écrire $dv/v^2 = f(t)$ puis intégrer de chaque côté (faire attention aux bornes !), $\tau = \dfrac{m}{kv_0} = 32$ s ; $x(\tau) = m\ln(2)/k = 888$ m ; la voiture ne s'arrête jamais !

5 Pendule simple (* et **)

Un pendule simple est constitué d'un fil suspendu de longueur L, attaché au point fixe O, auquel est attaché un objet de petites dimensions. Ce dernier est assimilé à un point matériel M de masse m. On écarte le pendule de sa position verticale d'un petit angle θ_0 puis on le lâche sans vitesse initiale.
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation angulaire $\theta(t)$ du pendule repéré par rapport à la verticale descendante passant par le point O. En déduire la période T des petites oscillations du pendule.
2. Le pendule est maintenant disposé sur une table à coussin d'air inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. La position du point d'attache O est telle que le fil demeure dans un plan parallèle à la table à coussin d'air. Le pendule est lancé comme précédemment, le fil étant maintenu parallèle à la table.
Établir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation angulaire $\theta(t)$ du pendule et en déduire, pour des oscillations de faible amplitude la solution $\theta(t)$ et la période T des petites oscillations du pendule.

Rép : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta\sin\alpha = 0$

6 Oscillation longitudinale d'un mobile fixé à deux ressort (*)

Un mobile autoporteur peut effectuer un mouvement de translation suivant un axe Ox horizontal sous l'action de deux ressorts identiques (k, l_0) placés le long de l'axe Ox. On appelle x la position du mobile par rapport au milieu des deux points de fixation. La distance séparant ces deux points d'attache vaut $2L = 3l_0$.
1. Exprimer l'énergie potentielle élastique totale de ce système oscillant.
2. Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait le mouvement du mobile ? Déterminer la période des oscillations longitudinales. Commentaires ?
3. On écarte le mobile de $x_0 = \frac{l_0}{2}$, puis on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'expression de $x(t)$ et représenter l'allure de l'évolution en fonction du temps des énergies E_c, E_P et E_M de cet oscillateur.

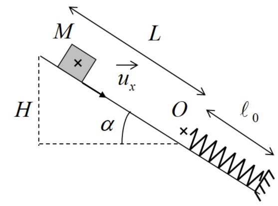
Rép : $E_p = \dfrac{1}{2}k(L+x-l_0)^2 + \dfrac{1}{2}k(L-x-l_0)^2 ; m\ddot{x} + 2kx = 0 ; x(t) = \dfrac{\ell_0}{2}\cos\omega t$

7 Mouvement d'un point dans un potentiel cuvette (*)

Une particule de masse m est soumise à une force $\vec{F}(x) = \left(-kx + \frac{a}{x^3}\right)\vec{\imath}$, où k et a sont des constantes positives. L'étude du problème est limité au domaine $x > 0$.
1. Justifier que $x_0 = \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{1}{4}}$ est une position d'équilibre que l'on notera x_0.
2. Représenter $F(x)$ en fonction de x pour $0 < x < +\infty$.
3. Quelle est la relation qui lie $F(x)$ et son potentiel associé $V(x)$? En déduire $V(x)$. Soit $V(x_0) = \sqrt{ka}$ la valeur du potentiel à la position d'équilibre. En déduire que la constante d'intégration du potentiel doit être nulle.
4. Représenter $V(x)$ en fonction de x pour $0 < x < +\infty$.
5. Donner l'expression de l'énergie mécanique E de la particule.
6. Montrer que l'on doit avoir $E > \sqrt{ka}$ pour que le mouvement de la particule soit possible.
7. Montrer que le potentiel au voisinage de la position d'équilibre est de la forme $V(x) \simeq \sqrt{ka} + 2k\left(x - x_0\right)^2$.
En déduire la nature du mouvement de la particule au voisinage de sa position d'équilibre.

Rép : $V(x) = \dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{a}{2x^2}$; $E = \dfrac{1}{2}kx^2 + \dfrac{a}{2x^2} + \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$

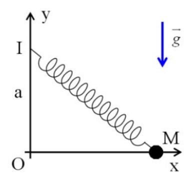
8 Cube sur un plan incliné (**)



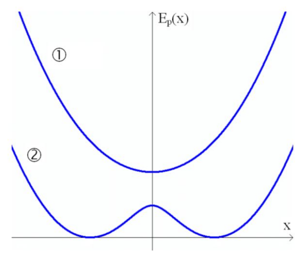
On lâche sans vitesse initiale un cube de masse m sur un plan incliné d'angle α. Il glisse sans frotter sur la ligne de plus grande pente sur une distance L avant d'atteindre un ressort fixé à son extrémité basse, de masse négligeable, de longueur à vide l_0 et de raideur k. On admet que la vitesse du cube reste continue lorsque la masse touche le ressort.
On choisit comme origine du plan incliné le point O (fixe) où se trouve l'extrémité haute du ressort, lorsqu'il est à sa longueur à vide l_0, avant que la masse l'atteigne. On considère que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle lorsque M est en O.
1) Pourquoi l'énergie mécanique de la masse M est-elle constante ? L'exprimer en fonction de L, α, m et g.
2) En déduire la longueur l_{min} du ressort lorsqu'il est comprimé au maximum.
3) En quel point d'abscisse x_v la vitesse du cube est-elle maximale ?

Rép : $E_m = mgL\sin\alpha = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}kx^2$; $l_{\text{min}} = l_0 - \frac{mg\sin\alpha + \sqrt{\Delta}}{k}$ avec $\Delta = (mg\sin\alpha)^2 + 2kmgL\sin\alpha$; $x_v = \frac{mg\sin\alpha}{k}$

9 Oscillateur de Landau (**)



Un ressort de raideur k, de longueur au repos ℓ_0, et de masse négligeable est relié par l'une des extrémités au point fixe I $(0;a)$ et l'autre à un anneau M de masse m, coulissant sans frottement sur un axe (Ox) horizontal (voir figure ci-contre).
1. Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique du système.



2. En étudiant le profil d'énergie potentielle $E_p(x)$, déterminer la(les) position(s) d'équilibre(s) du point matériel M. Montrer que le comportement du système est différent pour $a < \ell_0$ et pour $a > \ell_0$. Identifier alors les profils d'énergie potentielle proposés ci-contre et pour chaque cas décrire les différents mouvements possibles selon la valeur de l'énergie mécanique du système.
3. Dans le cas du profil n°2, on lance l'anneau à partir d'une position d'équilibre stable avec une vitesse V_0.
3.1. Déterminer la vitesse minimale à fournir pour atteindre l'autre position d'équilibre stable.
3.2. En déduire les positions extrêmes x_{Max} et x_{min} accessibles au cours du mouvement
4. Montrer dans le cas du profil $n°1$ que le système se comporte, au voisinage de sa position d'équilibre, comme un oscillateur harmonique. Déterminer, dans ce cas, la pulsation des oscillations.

Rép : Utiliser Pythagore pour la longueur du ressort, $x = 0$ toujours position d'équilibre, ainsi que $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ si $\ell_0 > a$; $v_{min} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}(\ell_0 - a) ; x_{Max} = 2\sqrt{\ell_0^2 - a\ell_0} ; \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}\dfrac{a-\ell_0}{a}}$