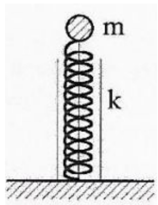
DM PFD-Énergie

Règle du jeu : Chacun doit faire et rendre, rédigé (mais avec le minimum de mots !), un exercice au choix, si vous ne faites pas le DM sur le ressort.
Vous pouvez en faire davantage, et m'en rendre un deuxième.
Des exos sont très similaires, n'en faites qu'un !
Je suis disponible pour donner des indications si besoin, vous pouvez vous aider les uns les autres. Je vous rappelle par contre que l'insertion professionnelle des moines copistes est délicate de nos jours et que je ne suis pas totalement stupide...

1 * Masse posée sur un ressort : condition de décollage

Un objet de masse m que l'on assimile à son centre d'inertie est posé sur un ressort de constante de raideur k maintenu vertical.

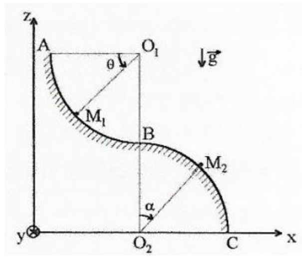


1 - On comprime le ressort d'une longueur a et on l'abandonne sans vitesse initiale. Établir l'équation horaire du centre d'inertie de l'objet et donner la période des oscillations lorsque celui-ci reste posé sur le ressort.
2 - Calculer la longueur a minimale à imposer au ressort pour que la masse décolle.

Rép : On peut poser $X = x - x_e$ d'où $X = -a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $a_{\min} = \frac{mg}{k}$

2 * Bille dans une glissière : des savoir-faire basiques en pfd et énergie

On considère une surface formée de deux quarts de cylindre de rayon r reliés l'un à l'autre. Un point matériel de masse m est abandonné sans vitesse initiale à la partie supérieure A et peut glisser sans frottement sur cette surface. Sur la partie (1) la position du mobile est repérée par $\widehat{AO_1M_1} = \theta$ et sur la partie (2) par $\widehat{BO_2M_2} = \alpha$.



1 - Le mobile étant sur la partie (1) de cette piste expliquer pourquoi le mouvement est plan. Écrire la relation fondamentale de la dynamique, projeter cette relation sur l'axe tangent, en déduire l'expression de la vitesse angulaire en M_1 puis les caractéristiques du vecteur vitesse en B.
2 - Le mobile étant maintenant sur la partie (2), projeter la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe tangent et sur l'axe normal ; en déduire la valeur de la vitesse du point matériel en M_2 puis l'intensité de la réaction normale de la piste en ce point.
3 - Montrer que le mobile quitte la piste en une position que l'on précisera.

Rép : $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}\sin\theta}$; $v_B = \sqrt{2gr}$; $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}(2 - \cos\alpha)}$; $N = mg(3\cos\alpha - 4)$;

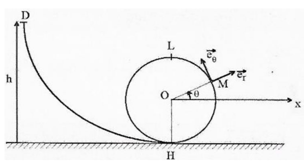
3 * Masse attachée à un fil : très proche de l'exo précédent

Un point matériel de masse m est relié à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse de longueur ℓ. A partir de sa position d'équilibre on lui impose latéralement une vitesse initiale v_0 telle que $v_0^2 = 3g\ell$ de façon à communiquer un mouvement circulaire dans un plan vertical.
1 - Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au point matériel dans une position quelconque définie par θ.
2 - En projetant la relation obtenue sur la tangente et en intégrant exprimer la vitesse en fonction de θ. Retrouver ce résultat par une méthode énergétique.
3 - En projetant la relation fondamentale sur la normale au mouvement exprimer la tension du fil.
4 - Comment évolue le mouvement de la masse ?

Rép : $v = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)} = \sqrt{g\ell(1+2\cos\theta)}; T = mg(1+3\cos\theta)$. La vitesse s'annule pour $\cos\theta_1 = -\frac{1}{2}$; La tension s'annule pour $\cos\theta_2 = -\frac{1}{3}$

4 * Looping ? : très proche des deux précédents

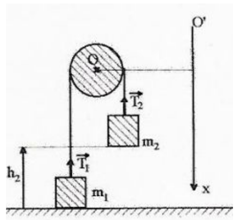
Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans une gouttière DHL. Le point M est abandonné sans vitesse initiale au point D d'altitude h ; il arrive donc en H avec une vitesse d'intensité $\sqrt{2gh}$. On appelle a le rayon de la piste circulaire.



1 - Soit $\vec{N}$ la réaction de la gouttière, écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point matériel M dans une position repérée par l'angle θ sur la piste circulaire. Projeter cette relation vectorielle sur les axes de vecteurs unitaires $\vec{e_r}$ et $\vec{c_\theta}$.
2 - Choisir astucieusement l'une des deux relations obtenues, l'intégrer pour obtenir l'expression $N(\theta)$.
3 - En déduire la valeur minimale de h pour que le contact persiste quelque soit θ.

Rép : $\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -g\sin\theta + g\left(\frac{h}{a} - 1\right)$; $N = mg\left(-3\sin\theta + \frac{2h}{a} - 2\right)$; $h > \frac{5}{2}a$.

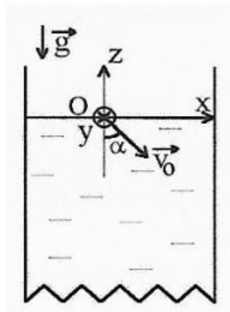
5 * Deux masses et une poulie : jonglage entre les systèmes (proche de l'exo du TD)



On considère le dispositif ci-dessous, les deux masses $M_1\,(m_1)$ et $M_2\,(m_2)$ sont reliées par un fil souple inextensible ne glissant pas sur la poulie. On donne $m_2 > m_1$ et on choisit un axe $O'x$ orienté vers le bas. A l'instant pris comme origine des temps la masse M_1 décolle du sol avec une vitesse nulle, la masse M_2 est à l'altitude h_2.
1 - En négligeant l'inertie de la poulie (on admet alors que $T_1 = T_2$) établir les expressions des accélérations des masses M_1 et M_2.
2 - A quelle date le mouvement s'arrête-t-il ?
Déterminer alors la vitesse de chacune des masses.

Rép : 1. $\gamma_2 = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g; \gamma_1 = -\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g$ 2. $t = \sqrt{\frac{2h_2}{\gamma_2}} = \sqrt{\frac{2h_2(m_1+m_2)}{(m_2-m_1)g}}$ $\quad v_2 = \sqrt{\gamma_2 h_2}; v_1 = -\sqrt{2\gamma_2 h_2}$

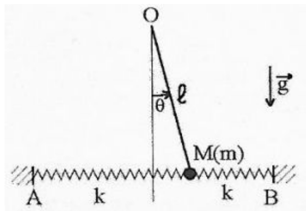
6 ** Bille dans un fluide : poussée d'Archimède et équadif d'ordre 1



Une bille sphérique de rayon r (faible) et de masse m arrive obliquement à la date $t = 0$ dans un liquide immobile avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec la verticale. Elle est soumise à la force de pesanteur, à la poussée d'Archimède et à une force de frottement d'expression $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où η est le coefficient de viscosité du liquide. μ_1 est la masse volumique *du* liquide et μ celle du solide homogène.
1 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique établir les expressions des composantes du vecteur vitesse.
2 - Donner les équations horaires du mobile en posant $\beta = \frac{9\eta}{2r^2\mu}$.
3 - Comment se comporte la vitesse au bout d'un temps suffisamment long ? Que dire alors du mouvement ?

Rép : $v_x = v_0 \sin\alpha e^{-\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\mu}t} v_z = -\frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta}(\mu-\mu_1)\,g\left(1-e^{-\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\mu}t}\right) - v_0\cos\alpha e^{-\frac{9}{2}\frac{\eta}{r^2\mu}t}$; $x = \frac{v_0\sin\alpha}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)$; $z = -\frac{(\mu-\mu_1)g}{\beta\mu}\left(t+\frac{e^{-\beta t}-1}{\beta}\right) + \frac{v_0\cos\alpha}{\beta}\left(e^{-\beta t}-1\right)$

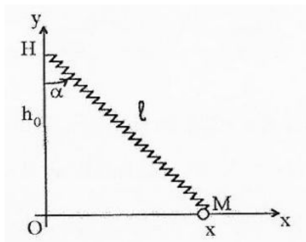
7 ** Pendule attaché à deux ressorts : développements limités



On considère un pendule constitué d'une tige de longueur ℓ rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe Δ passant par son extrémité supérieure O. A l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle. Par ailleurs ce point M est relié à deux ressorts identiques (k, ℓ_0) eux mêmes accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige OM est selon la direction verticale.
On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre.
En appliquant au choix : le PFD, l'énergie ou le théorème du moment cinétique au point matériel M montrer que le mouvement est harmonique, donner l'expression de la période des petites oscillations.
On rappelle que $\cos x \simeq 1 + x^2/2$ au voisinage de $x = 0$

Rép : $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0$; $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}+\frac{2k}{m}}}$

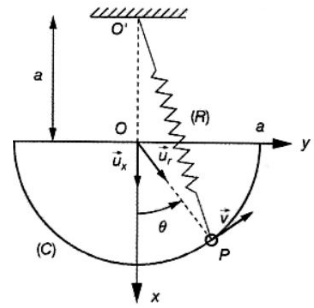
8 **Oscillateur : développements limités, projections



Un point matériel M de masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal Ox. Ce point est lié à un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, accroché à un point H tel que $OH = h_0 < \ell_0$.
A l'instant initial on lâche le point matériel M sans vitesse à partir d'une position proche de la position d'équilibre.
1 - Faire un bilan des forces exercées sur le point M, on écrira l'expression de la tension du ressort en fonction de k, x, h_0 et ℓ_0.
2 - Par projection de la relation fondamentale, établir l'équation différentielle du mouvement de M sur Ox. La retrouver énergétiquement.
3 - A quelle condition les oscillations sont-elles harmoniques (sinusoïdales) ? En donner alors l'expression de la période.

Rép : $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx\left(1-\frac{\ell_0}{\sqrt{h_0^2+x^2}}\right) = 0$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell_0}{k(h_0-\ell_0)}}$

9 *** Équilibre stable ou instable : étude d'un profil énergétique



Soit un référentiel galiléen $Å_g$ de repère $(OX, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz})$ de vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y \vec{u}_z$. Une perle quasi ponctuelle P, de masse M, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle (C), de rayon a. Le point P est attaché à un ressort (P) dont Pautre extrémité est fixée en O' $(OO' = a)$,
Le ressort (R) possède une constante de raideur k et une longueur au repos ℓ_0. Le point P est repéré par l'angle $(Ox, OP) = \theta$
1.a) Exprimer $\overrightarrow{OP}$ en fonction de a et θ dans la base polaire $\left(\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{a}, \vec{u}_\theta\right)$. En déduire Pexpression du module $O'P$.

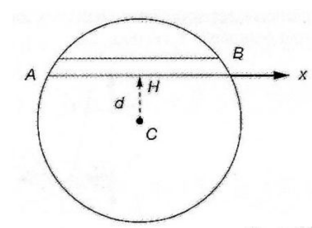
b) Exprimer la tension $\tilde{\tau}$ du ressort en fonction de a, k, ℓ_0 et $\theta/2$ dans la base $(\vec{u}_n \bar{u}_\theta)$.
2. a) Comment s'exprime la vitesse $\vec{v}$ de P dans $\mathscr{R}_g$ en utilisant la base de projection $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$?
b) On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la perle P.
Donner l'expression de $\vec{F} \cdot \vec{v}$ en fonction de θ et $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. En déduire l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p$ (à une constante près) dont dérive la force $\vec{F}$.
3. a) On suppose les relations suivantes entre les paramètres :

$$a = \frac{2Mg}{k} \quad \text{et} \quad \ell_0 = \sqrt{3}\left(a - \frac{Mg}{k}\right).$$

Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$?
b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.

Rép : $O'P = 2a\cos\frac{\theta}{2}$; $\vec{T} = -k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\vec{u}_r - \sin\frac{\theta}{2}\vec{u}_\theta\right)$; $\mathscr{E}_p = \left(-Mga + ka^2\right)\cos\theta - 2k\ell_0 a\cos\frac{\theta}{2} + C$; $\theta_1 = 0$ (instable) $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ (stable)

10 ** Tunnel terrestre : équation du mouvement par l'énergie



On démontre que, pour tout point M de masse m, situé à l'intérieur de la Terre, à la distance r du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :

$$\vec{f} = -mg_0\frac{r}{R}\vec{u}_r \quad \left(R: \text{rayon de la Terre}, \quad r = CM, \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}\right)$$

Données numériques : $R = 6,410^6$ m; $g_0 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.
a) On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe Hx ne passant pas par C et traversant la Terre. On note d la distance CH du tunnel au centre de la Terre.
Un véhicule, assimilé à un point matériel M (masse m), glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part du point A de la surface terrestre, sans vitesse initiale. Le point M étant en mouvement unidirectionnel, son énergie potentielle de gravitation $\mathscr{E}_p(x)$ est définie par :

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -\vec{f} \cdot \mathrm{d}x\vec{u}_x$$

- Quelle est l'expression de $\mathscr{E}_p(x)$ sachant que $\mathscr{E}_p = \frac{mg_0R}{2}$ au point A ?
- Quelle est sa vitesse maximale v_m au cours de son mouvement ?
Calculer v_m sachant que $d = 510^6$ m.
b) Exprimer $\overline{HM} = x$ en fonction du temps t par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de v_m.
c) Représenter et commenter le graphe de $\mathscr{E}_p(x)$, $\mathscr{E}_p$ étant l'énergie potentielle de gravitation du point matériel M.
Décrire le mouvement du point M à partir de sa position initiale (en A).

Rép : $\mathscr{E}_p(x) = \frac{mg_0}{2R}\left(x^2 + d^2\right)$; $v_m = \sqrt{g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} = 510^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$; $v_m = \omega\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$