Particules chargées dans un champ

1 Modèle de conduction électrique dans un matériau

On considère un conducteur cylindrique de section S et de longueur L, dont les deux extrémités sont soumises à une différence de potentiel U. Un champ électrique uniforme, de norme E et dirigé dans le sens de l'axe (Ox) orthogonal à la section S, règne dans le volume du conducteur. Celui-ci contient une densité volumique de ρ d'électrons libres, de masse m et de charge $-e$, assurant la conduction électrique. On modélise les chocs entre les atomes du réseau atomique et les électrons libres par une force de frottement fluide linéaire $\vec{f} = -\alpha_\mathrm{f}\vec{v}$.
1. Montrer que les électrons atteignent une vitesse limite $\vec{v}_\infty$.
2. On suppose que la vitesse initiale des électrons est nulle. Donner la loi horaire de la vitesse $v(t)$ d'un électron et en donner la durée τ caractéristique.

Raisonnement important à comprendre pour la deuxième année !

3. En réalisant un calcul de flux d'électrons, exprimer le nombre δn d'électrons traversant la section S du conducteur pendant une durée $\mathrm{d}t$. On suppose que tous les électrons du conducteur ont atteint la vitesse limite $\vec{v}_\infty$. En déduire l'expression de la valeur absolue de l'intensité électrique dans ce conducteur.

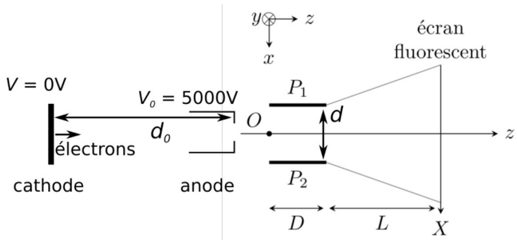
4. Montrer qu'une relation de proportionnalité unit la tension U aux bornes du conducteur à l'intensité qui la traverse. Définir sa résistance et commenter l'influence des paramètres géométrique L et S.
5. Pour le cuivre, on mesure une densité volumique d'électrons libres $\rho_\text{cuivre} = 8.49 \times 10^{28}$ électrons $\cdot\mathrm{m}^{-3}$. De plus, on définit sa résistivité comme $r = RS/L$ avec R la résistance du fil, qui vaut $r_\text{cuivre} = 1.68 \times 10^{-8}\Omega \cdot \mathrm{m}$. En déduire la constante de temps τ. Jusqu'à quelle fréquence est-il raisonnable de considérer que les électrons libres sont en permanence à la vitesse limite ?
Données : $m_\text{électron} = 9.11 \times 10^{-31}$ kg; $e = 1.6 \times 10^{-19}$C

Rép : $\vec{v}_\infty = -\frac{eE}{\alpha_\mathrm{f}}\vec{e}_x; \vec{v}(t) = \vec{v}_\infty(1 - \exp(-t/\tau))$ avec $\tau = m/\alpha_\mathrm{f}; |I| = e\rho S v_\infty; U = V(L) - V(0) = EL$ donc $|I| = \frac{e^2\rho S}{L\alpha_\mathrm{f}}U; \tau = 2.48 \times 10^{-14}$ s

2 Déflection dans un tube cathodique (Banque PT 2023)

Les anciens oscilloscopes, les anciennes télévisions cathodiques, fonctionnent tous sur le même principe : des électrons sont produits à une cathode (par un filament chauffé par exemple), et son accélérés en ligne droite par une différence de potentielle importante entre la cathode et une anode.

Ce faisceau d'électrons entre ensuite dans une zone où règne un champ électrique perpendiculaire, produit par deux plaques P_1 et P_2, et d'intensité réglable. Ceci sert à dévier les électrons de façon contrôlée.
Enfin, les électrons sortent de cette zone et arrivent dans une zone où $\vec{E} = \vec{0}$, puis impactent un écran fluorescent, ce qui produit de la lumière.
Nous étudions ici un tel dispositif. L'ensemble est placé sous vide. Le poids est négligé. On note m la masse des électrons et $-e$ leur charge.



1 - Donner l'expression de la vitesse v_0 des électrons en sortie de l'anode, en fonction de V_0, e et m.
2 - On s'intéresse ensuite à la déviation entre les plaques P_1 et P_2. On note $U = V_{P_2} - V_{P_1} > 0$. Donner l'expression de la force subie par les électrons en fonction de U, d, e et un vecteur de la base.
3 - On suppose que les électrons arrivent dans cette zone au point O, avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z$ calculée à la question 1. Établir l'évolution du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ dans cette zone, puis des coordonnées $x(t)$ et $z(t)$.
4 - En déduire l'angle de déviation du vecteur vitesse entre l'entrée et la sortie de cette zone.

Rép : $v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}; \vec{F} = \frac{eU}{d}\vec{u}_x; x = \frac{eU}{2dm}t^2, z = v_0 t; \tan\alpha = \frac{eUD}{mdv_0^2}$

3 Proton dans un champ magnétique

Un proton de masse m et de charge $\mathrm{q} > 0$ arrive à la vitesse $\overrightarrow{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\,\overrightarrow{\mathrm{i}}$ dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{\mathrm{B}_0} = \mathrm{B}_0\overrightarrow{\mathrm{k}}$ avec $(\overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}}, \overrightarrow{\mathrm{k}})$ base du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, z)$.

A savoir refaire les yeux fermés

1) Montrer que la trajectoire du proton est plane et que l'énergie cinétique est une constante du mouvement.
2) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire, conclure sur la nature du mouvement

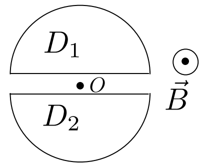
Même chose, avec des calculs....
3) Déterminer les coordonnées du proton à l'instant t. On posera $\omega_\mathrm{C} = \frac{\mathrm{qB}}{\mathrm{m}}$. A l'instant initial on considère la particule en O.
4) Préciser les caractéristiques de la trajectoire du proton.

Rép : $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{v}}{\omega_\mathrm{c}}\sin\omega_\mathrm{c}\mathrm{t}, \mathrm{y} = \frac{\mathrm{v}}{\omega_\mathrm{c}}(\cos\omega_\mathrm{c}\mathrm{t} - 1), \mathrm{z} = 0; \mathrm{R} = \frac{\mathrm{mv}}{\mathrm{qB_0}}$

4 Principe du cyclotron

1) Calculer numériquement la période T_0 et la pulsation ω_0 dite cyclotron du mouvement d'un proton de vitesse initiale v_0 dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à $\overrightarrow{v_0}$; on donne $B = 1$ T, $e = 1.610^{-19}$C (charge du proton) et $m = 1.6610^{-27}$ kg (masse du proton).

2) Un cyclotron est un accélérateur de particules formé de deux boites métalliques semicylindriques D_1 et D_2 placées de sorte que $\vec{B}$ soit parallèle aux génératrices du cylindre. Des protons sont injectés à vitesse nulle au centre O du système. Une différence de potentiel Vm $\cos \omega t$ est appliquée entre D_1 et D_2 de sorte qu'un proton passant d'une boite à l'autre trouve toujours dans l'espace entre elles un champ électrique lui communiquant une accélération. On néglige la durée de passage d'une boite à l'autre.



a) Comment doit-on choisir la pulsation ω de la différence de potentiel pour accélérer au maximum les protons ?

b) Le rayon des boites est de r = 0.5 m. Quelle est l'énergie maximale E à laquelle on peut accélérer un proton dans ce dispositif ? Quelle est la vitesse v d'un tel proton ? Tracer l'allure de la trajectoire des protons.

c) Quelle serait la différence de potentiel V_0 continue nécessaire pour accélérer un proton à cette vitesse v en une seule fois à partir d'une vitesse nulle ?

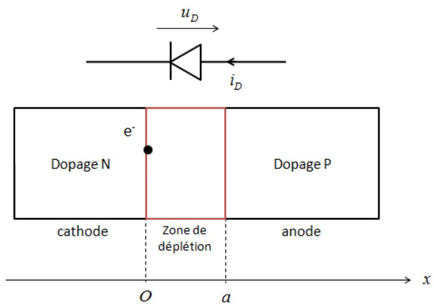
d) On émet en O un proton au moment où la différence de potentiel a sa valeur maximale Vm = 10kV. Quel est le nombre maximal de tours qu'il peut effectuer dans l'appareil ?

Rép : $\omega_0 = 9,6.10^7\ \mathrm{s}^{-1}; \omega = \mathrm{eB/m}; \mathrm{E} = 1,9.10^{-12}\ \mathrm{J}; \mathrm{v_{max}} = 4,8.10^7\ \mathrm{m/s}; \mathrm{V_0} = 1.210^7\ \mathrm{V}; \mathrm{n} = 603$ tours

5 Modélisation d'une diode

Une diode est constituée à partir de la mise en contact de deux matériaux semi-conducteurs :
- l'un «dopé Nˇ, ayant un surplus de charges négatives (électrons).
- l'autre & dopé P ≫, ayant un manque d'électrons.

Lors de l'accolage de ces deux matériaux, les électrons les plus proches de la frontière côté N vont remplir les trous côté P. Il se crée ainsi une zone de déplétion, globalement neutre, quasiment isolante. On note $a = 300$ nm son épaisseur.



En présence d'une tension entre des deux pôles de la diode, les électrons peuvent traverser la zone de déplétion et créer ainsi un courant. Cette zone étant isolante, on considère qu'elle s'oppose au mouvement de l'électron en exerçant sur lui une force de frottement constante de norme $F_0 = 0,3 \cdot 10^{-12}$ N. Une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ existe également. L'électron a pour masse $m = 9.10^{-31}$ kg, on prendra $\alpha = 10^{-20}$ S.I.
On étudie le mouvement d'un électron, de N vers P.

1) Indiquer de quel signe doit être la tension u_D pour que l'électron puisse atteindre l'anode. Ce mouvement de l'électron correspond à un courant i_D de quel signe ?

2) Exprimer le champ électrique $\vec{E}$ existant dans la zone de déplétion. Dans la cathode et l'anode, chacune de potentiel constant, le champ $\vec{E}$ est nul.

À l'instant initial, l'électron de charge $q = -e$ est situé à une abscisse $x = 0$, à l'entrée de la zone de déplétion, sans vitesse initiale.

3) Déterminer en fonction du temps l'évolution du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. À quelle condition entre u_D, e, a et F_0 l'électron peut-il franchir la zone de déplétion ?

4) Déterminer la valeur de la tension de seuil U_0 à partir de laquelle le courant circule dans la diode.
Tracer la caractéristique courant / tension de la diode et commenter qualitativement son rôle dans un circuit.

Rép : $u_D > 0, i_D > 0; \vec{E} = -\frac{u_D}{a}\overrightarrow{u_x}; v_x(t) = \frac{\tau}{m}\left(\frac{eu_D}{a} - F_0\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right); U_0 = u_{D_{lim}} = \frac{F_0 a}{e} = 0,6$ V

6 Sélection en vitesse de particules chargées

Une particule de masse m et charge q pénètre avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ dans une zone où existent un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{u}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$ uniformes et stationnaire.

1 - À quelle condition le vecteur vitesse de la particule reste-t-il inchangé ?

2 - Expliquer comment ce dispositif peut être adapté en sélecteur de vitesse.

7 Rayonnement classique de l'électron (Banque PT 2025)

On envisage un électron de charge -e et e masse m entrant avec une vitesse initiale $\vec{v}(0) = v_0\overrightarrow{u_x}$ dans une zone où règne un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$.

1. En négligeant tout phénomène dissipatif, montrer que le mouvement est uniforme et plan.
2. On admet que la trajectoire est circulaire. Établir l'expression du rayon R de la trajectoire.

Pendant son mouvement l'électron produit un rayonnement électromagnétique. On montre que la puissance rayonnée à chaque instant est $P(t) = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\vec{a}^2(t)$ où $\vec{a}(t)$ désigne l'accélération instantanée de l'électron.

3. Vérifier l'homogénéité de l'expression précédente. La perte d'énergie par rayonnement étant très faible sur une période de révolution.
4. Expliquer qualitativement comment est modifiée la trajectoire de l'électron si on tient compte du rayonnement.
5. Compte tenu des hypothèses, établir l'expression de l'énergie cinétique de l'électron au cours du temps.

Rép : $R = \frac{mv_0}{eB_0} = \frac{v_0}{\omega_c}$; Ec va décroître, donc R va diminuer ; $R(t) = R(0)e^{-\frac{t}{2\tau}}$