Capacité numérique : Des cyclotrons pour la médecine

Objectif : Mettre en oeuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.

I. Présentation de la méthode d'Euler

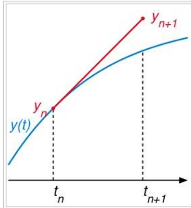

Illustration de la méthode d'Euler explicite : l'avancée se fait par approximation sur la tangente au point initial.

En mathématiques, la méthode d'Euler, nommée ainsi en l'honneur du mathématicien Leonhard Euler (1707-1783), est une procédure numérique pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. C'est la plus simple des méthodes de résolution numérique des équations différentielles.

• **Principe de la méthode** La méthode d'Euler est une méthode numérique élémentaire de résolution d'équations différentielles du premier ordre, de la forme

$$\forall x \in I, u'(x) = f(x, u(x))$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, une fonction réelle sur $I \times \mathbb{R}$. Étant donné une condition initiale $(a, u(a)) \in I \times \mathbb{R}$, la méthode fournit pour tout point $b \in I$ une suite $(u_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximations de la valeur $u(b)$ que prend, lorsqu'elle existe, la solution de l'équation qui correspond à cette condition initiale. Divers jeux de conditions sur f peuvent assurer la convergence de cette suite. La valeur $u_n(b)$ s'obtient en calculant n valeurs intermédiaires $(y_i)_{i\in\{0,n\}}$ de la solution approchée aux points $(x_i)_{i\in\{0,n\}}$ régulièrement répartis entre a et b, donnés par

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

• **Euler explicite**
En étendant cette notation à $x_0 = a, y_0 = u(a)$ et $x_n = b, y_n = u_n(b)$ et en utilisant l'approximation de la dérivée

$$u'(x_i) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

On en déduit la relation suivante :

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, y_i)$$

Les valeurs intermédiaires sont alors données par la relation de récurrence

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i), i \in \{0, n-1\}.$$

qui est le schéma d'Euler explicite.

II. Application au tracé de la trajectoire de particules dans un cyclotron

Le cyclotron est un accélérateur de particules. De taille plutôt réduite par rapport à un accélérateur linéaire ou à un synchrotron, les cyclotrons sont aujourd'hui largement utilisés en médecine nucléaire, notamment pour la production de radionucléides, l'imagerie médicale, la radiothérapie et la protonthérapie, ainsi qu'en recherche en chimie nucléaire et en physique nucléaire. Le cyclotron ARRONAX, situé à l'université de Nantes, est l'un des plus puissants au monde.

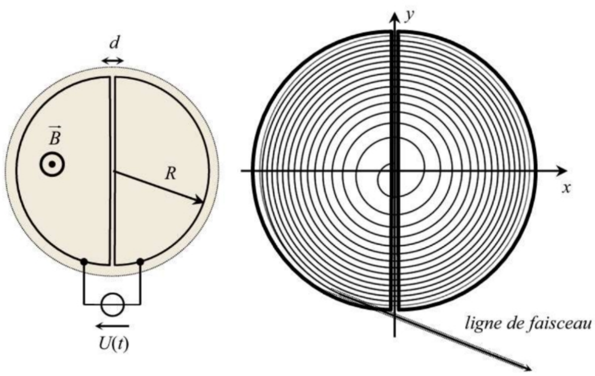

Schéma de principe d'un cyclotron


Le cyclotron ARRONAX

Le schéma de principe d'un cyclotron est présenté ci-dessus. Les Dees métalliques, de rayon R, sont séparés de la distance et sont portés à une différence de potentiel $U(t)$ variable dans le temps à la fréquence f. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique intense $\vec{B}$ créé par un électroaimant (zone grisée). Les particules chargées sont injectées au voisinage du centre et suivent une trajectoire en spirale jusqu'à la ligne de faisceau pour être utilisées.

Les particules étudiées sont des ions hydrogène négatifs H^-de masse $m = 1,67.10^{-27}$ kg et de charge $q = -e$ où $e = 1,6.10^{-19}$C est la charge élémentaire. $c = 3.10^8$ m/s.
On rappelle la force électromagnétique :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

avec $\vec{E}$ le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique.
Une particule est injectée sans vitesse initiale dans la zone entre les dees. On suppose que la tension entre les armatures est constante et vaut $V_0 > 0$. On néglige l'effet du champ magnétique. La vitesse v atteinte par la particule quand elle entre dans le premier Dee est : $v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$.
Une fois à l'intérieur du Dee, la particule ne subit plus que le champ magnétique, supposé constant et uniforme. La particule subit alors une trajectoire circulaire à l'intérieur du Dee, de rayon : $r = \frac{mv}{eB}$. Sa vitesse angulaire $\omega_c = \frac{eB}{m}$ est la pulsation cyclotron.
Après un demi-tour, la particule se retrouve de nouveau entre les dees. Le champ électrique doit être inversé pour pouvoir continuer à accélérer la particule. La tension entre les dees vaut donc $U = -V_0$, et l'énergie cinétique augmente de eV_0 à chaque passage entre les dees.
En choisissant judicieusement la fréquence du signal $U(\mathrm{t})$ à la fréquence cyclotron $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$, on peut accélérer la particule à chaque demi-tour.
Pour un champ $B = 2$ T, $f_c = 30,5$MHz. C'est la fréquence utilisée dans le cyclotron ARRONAX ; Le rayon maximal du cyclotron correspond au rayon de la dernière trajectoire circulaire, juste avant de sortir et d'atteindre la ligne de faisceau. Pour $v_{\max} = 0,1c, R_{\max} = \frac{v_{\max}}{\omega_c} = 16cm$.

On se propose de simuler numériquement en Python le mouvement de particules H^-dans un cyclotron, depuis leur injection entre les dees jusqu'à leur sortie dans la ligne de faisceau. Pour cette simulation, le cyclotron aura les caractéristiques voisines de ARRONAX :
> Champ magnétique : $B = 2,0$ T
> Fréquence cyclotron : $f_c = 30,45$MHz
> Distance entre les Dees : $d = 5,0$ mm
> Tension maximale : $V_0 = 65$kV
La différence de potentiel appliquée entre les Dees est sinusoïdale de fréquence f_c, de la forme :

$$U(t) = V_0 \cos(2\pi f_c t)$$

Le champ électrique et la tension U sont reliés par $E = U/d$. Une particule est repérée dans l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère défini sur la figure précédente. On note (v_x, v_y) les composantes de sa vitesse. Les particules sont injectées au point O sans vitesse initiale. Le champ magnétique est uniforme dans tout le dispositif. On utilise un cyclotron de 32 cm de diamètre.

Un squelette de programme est dans le dossier info/cyclotron de cdp.

1. Définir en Python les différentes grandeurs du problème : `m, q, B, v0, d, fc, Rmax`

2. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ d'une particule H^-dans le cyclotron en fonction des données du problème. En déduire la fonction d'entête :

```
def acceleration(x, y, vx, vy, t)
```

renvoyant le couple de coordonnées `ax,ay` de l'accélération d'une particule connaissant sa position (`x,y`) et sa vitesse (`vx,vy`) à l'instant `t`.

3. Utilisation de la méthode d'Euler : A l'aide d'un développement limité entre les instants très proches t et $t + dt$, exprimer la vitesse $v_x(t + dt)$ en fonction de $v_x(t), dt$ et $a_x(t)$, ainsi que la position $x(t + dt)$ en fonction de $x(t), dt$ et $v_x(t)$. En déduire la fonction d'entête :

```
def cyclotron (dt, tmax, Rmax)
```

renvoyant les tableaux `x, y, vx, vy, t` contenant respectivement les coordonnées et la vitesse d'une particule dans un cyclotron de rayon Rmax à tous les instants contenus dans la liste t pendant l'expérience numérique de durée maximale `tmax` avec un pas temporel de `dt`.

4. Tracer la trajectoire d'une particule H^-dans le cyclotron. On prendra `tmax = 2.` 10^{-6} s, `dt =` 10^{-10} s (on pourra les faire varier pour voir leur influence sur la simulation)