

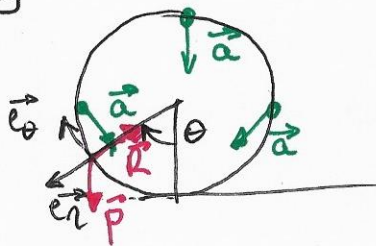
Roller Coaster

1) Vitesse en fin d'accélération $v_0 = a t_a = 1,15 \times 9,8 \times 2,5$
 $v_0 = 28 \text{ m s}^{-1}$

- Frottements négligés $\Rightarrow$ conservation Eméca entre le bas (A) et le haut (B):
 $\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh$

le train arrive en B si $v_B^2 \geq 0 \Leftrightarrow h \leq \frac{v_0^2}{2g}$ - on vérifie $\left\{ \begin{array}{l} h = 37 \text{ m} \\ \frac{v_0^2}{2g} = 39 \text{ m} \end{array} \right.$, c'est bon!

2)



Cours: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$ (Frenet)

$$\text{or ici } \left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = \vec{e}_\theta \\ \vec{N} = -\vec{e}_r \end{array} \right. \Rightarrow \vec{a} = \dot{v} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

(on a aussi $\vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \dots$)

3) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le train ralentit $\Rightarrow \dot{\theta} < 0$

$\theta = \pi$, — a vitesse minimale $\dot{\theta} = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ — accélère $\Rightarrow \dot{\theta} > 0$

Où les flèches vertes - (toujours vers l'intérieur, $-\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$)

4) PFD au train dans RTSQ: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

En proj sur $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

Equadiff non linéaire $\Rightarrow$ on ne sait pas résoudre (pas de petits angles!)

5

def derivee(X,t):

$x_p = X[1]$

$x_{pp} = -g/R * \sin(X[0])$

return [x_p, x_pp]

Htheta0 = 0

dtheta0 = v0/R

res = odeint(derivee, [theta0, dtheta0], tabt)

x point

x point point

(et pas v0!)

En effet: on trouve directement $\ddot{x} = 1^{\text{re}}$ composante du tableau X

on calcule $\ddot{x} = -\frac{g}{R} \sin x$ (equa diff)

(la variable est notée ici x, pas $\theta \dots$)

erreurs classiques: TOUT doit être en python

sinus inconnu sans np

pas de x: multiplication notée *

pas d'indice

L'arrivée correspond à $\theta = 2\pi \Rightarrow t_f \approx 5s$

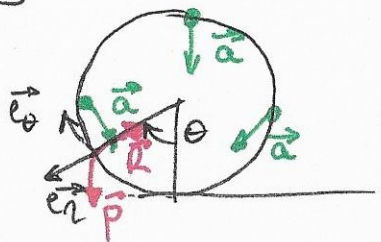
Koeler coaster

1) Vitesses en fin d'accélération $v_0 = a \times t_a = 1,15 \times 9,8 \times 2,5$
 $v_0 = 28 \text{ m s}^{-1}$ ②

• Frottements négligés ① conservation Éméca entre le bas (A) et le haut (B):
 $\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh$.

le train arrive en B si $v_B^2 \geq 0 \Leftrightarrow h \leq \frac{v_0^2}{2g}$ - on vérifie $\left\{ \begin{array}{l} h = 37 \text{ m} \\ \frac{v_0^2}{2g} = 39 \text{ m} \end{array} \right.$, c'est bon! ②

2)



Cours: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$ (Frenet)

② or ici $\left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = \vec{e}_\theta \\ \vec{N} = -\vec{e}_r \end{array} \right. \Rightarrow \vec{a} = \dot{v} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$
 (on a aussi $\vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \dots$)

3) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le train ralentit $\Rightarrow \dot{\theta} < 0$

③ $\theta = \pi$, — c'est à vitesse minimale $\dot{\theta} = 0$
 $\theta = \frac{\pi}{2}$ — accélère $\Rightarrow \dot{\theta} > 0$

D'où les flèches vertes - (toujours vers l'intérieur, $-\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$)

4) PFD au train dans RTSQ: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$.

En proj sur $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0 \quad ②$$

Equadiff non linéaire $\Rightarrow$ on ne sait pas résoudre (pas de petits angles!) ①

5) def dérivée(x, t):

① $x_p = x[1]$ # x point
 $x_{pp} = -g/R * np.sin(x[0])$ # x point point
 theta0 = 0
 return [x_p, x_pp] ①

dtheta0 = v_0/R # (et pas $v_0!$) ①

res = odeint(dérivée, [theta0, dtheta0], tabt) ②

En effet: on trouve directement $\ddot{x}$ = 1^{re} composante du tableau x

• on calcule $\ddot{x} = -\frac{g}{R} \sin x$ (equa diff)

(la variable est notée ici x, pas $\theta \dots$)

⚠ erreurs classiques: TOUT doit être en python... sinus inconnu sans np
 pas de x: multiplication notée *
 pas d'indice

6) L'arrivée correspond à $\theta = 2\pi \Rightarrow t_f \geq 5s$ - ①

Traineau sur la glace

1) PFD appliqué à 1 élément de corde de masse nulle :



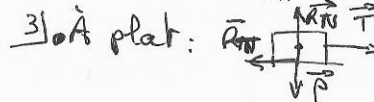
$$M\vec{a} = \vec{T}_g + \vec{T}_d \Rightarrow \boxed{\vec{T}_d = -\vec{T}_g} \quad (2)$$

les tensions à droite et gauche sont égales.

2) lois de Coulomb :



$$\begin{cases} R_T = \mu_s R_N & \text{si glissement} \\ R_T \leq \mu_s R_N & \text{si non glissement} \end{cases} \quad (2)$$

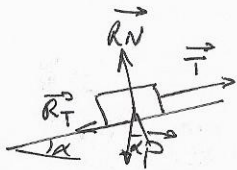


PFD au traineau dans RTSG :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = T - R_T \\ 0 = Mg - R_N \end{cases} \Rightarrow R_N = Mg \Rightarrow R_T = \mu_s Mg$$

$$\boxed{M\ddot{x} = T - \mu_s Mg} \quad (1) \quad (3)$$

• Incliné



$$\begin{cases} M\ddot{x} = T - R_T - Mg \sin \alpha \\ 0 = Mg \cos \alpha - R_N \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_N = Mg \cos \alpha \Rightarrow R_T = \mu_s Mg \cos \alpha$$

$$\text{Donc } \boxed{M\ddot{x} = T - \mu_s Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha} \quad (2) \quad (3)$$

$$\text{Soit } M\ddot{x} = T - Mg (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha)$$

On peut donc écrire (2) sous la forme (1) en posant

$$\boxed{\mu'_d = \mu_s \cos \alpha + \sin \alpha} \quad \text{avec } \alpha \text{ petit}$$

4) Au démarrage, à la limite de glissement, on a $R_T = \mu_s Mg$
L'équat° 1 donne $T_{\min}$ à l'accélération nulle :

$$T_{\min} = \boxed{F_0 = \mu_s Mg}$$

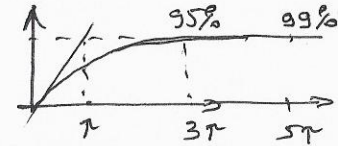
$$\text{AN: } \boxed{F_0 = 8 \cdot 10^{-2} \times 500 \times 10 = 400 \text{ N}} \quad (3)$$

$$5) (1) \text{ s'écrit alors } M\ddot{x} = F_0 - \beta v - \mu_d Mg$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\beta}{M} v = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{M}$$

$$\text{soit } \ddot{x} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau} \quad (3) \text{ avec } \boxed{\tau = \frac{M}{\beta}} \quad (2) \quad \boxed{v_\infty = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta}} \quad (3)$$

6) (3) est 1 eq diff d'ordre 1, on atteint v_∞ à 5% au bout de 3τ (course!) :



$$\Rightarrow \tau = \frac{3M}{\beta}$$

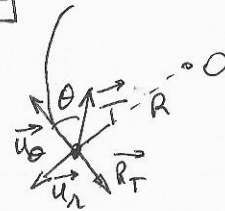
$$\Leftrightarrow \boxed{\beta = \frac{3M}{\tau}} \quad (1)$$

$$\text{Alors } (3) \Rightarrow v_\infty = v_0 = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta} \Rightarrow \boxed{F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg} \quad (1)$$

$$\text{AN: } \boxed{\beta = \frac{3 \times 500}{5} = 300 \text{ kg s}^{-1}} \quad (1)$$

$$\boxed{F_0 = 300 \times 3 + 5 \cdot 10^{-2} \times 500 \times 10 = 1,1 \text{ kN}} \quad (1)$$

7)



PFD au traineau dans RTSG, en prof ds le repère cylindrique : (mouvt circ uniforme)

$$\begin{cases} -m \frac{v_0^2}{R} = -T \sin \theta \\ 0 = T \cos \theta - \mu_d Mg \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{on en tire } \boxed{\tan \theta = \frac{v_0^2}{R \mu_d Mg}} \quad (2) \quad \text{D'autre part, le}$$

théorème de Pythagore fournit $T^2 = T^2 \cos^2 \theta + T^2 \sin^2 \theta = \left(\frac{mv_0^2}{R} \right)^2 + (\mu_d Mg)^2$

$$\Rightarrow \boxed{T = \sqrt{(\mu_d Mg)^2 + \left(\frac{mv_0^2}{R} \right)^2}} \quad (2)$$

$$8. \frac{1}{U(t/2)} - \frac{g}{U_0} \Leftrightarrow \frac{1}{U_0} = \frac{gt/2}{U_0^2} \text{ soit } t/2 = \frac{U_0^2}{U_0 g} \quad (2) = \frac{1}{2} U_0$$

Sur la chronophotographie, on lit $U_0 = 58 \text{ m/s}$ soit $\frac{U_0}{2} = 29 \text{ m/s}$.

$$\text{AN: } t/2 = \frac{6,7^2}{58 \cdot 10} \approx 7,7 \cdot 10^{-2} \text{ s.} \quad (2)$$

Les points sont enregistrés toutes les $50 \text{ ms} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$. Donc $t/2$ est entre les points 2 et 3, là où la distance parcourue entre 2 points est la moitié de la distance entre les 2 premiers points - compris entre 100 et 150 mm.

$$9. \text{ En projetant sur } \vec{x} \text{ la relation obtenue en 7: } \frac{dU_x}{dt} + g \frac{U_x U}{U_0^2} = 0$$

$$\text{or } \frac{1}{U} = \frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_0^2} \Leftrightarrow \frac{dU_x}{dt} + \frac{g}{U_0^2} \left(\frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_0^2} \right) U_x = 0$$

$$\text{(séparation des variables)} \Leftrightarrow \frac{dU_x}{U_x} = - \frac{g/U_0^2}{\frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_0^2}} dt = - \frac{U_0 g dt / U_0^2}{1 + g U_0 t / U_0^2}$$

$$\text{Par intégration: } \ln U_x = - \ln \left(1 + \frac{g U_0 t}{U_0^2} \right) + c_0$$

$$\text{à } t=0 \quad U_x(0) = U_0 \cos \theta_0 \Rightarrow c_0 = \ln U_0 \cos \theta_0$$

$$\text{Conclusion: } \ln U_x = - \ln \left(1 + \frac{g U_0 t}{U_0^2} \right) + \ln U_0 \cos \theta_0$$

$$\text{soit } U_x(t) = \frac{U_0 \cos \theta_0}{1 + \frac{g U_0 t}{U_0^2}}$$

puis par intégration:

$$x(t) = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \left(1 + \frac{g U_0 t}{U_0^2} \right) + c_1 \quad (3)$$

$$10. \text{ D'après ce qui précède, on a: } x(v) = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{U_0}{U} \quad (2)$$

$$11. \|\vec{F}\| = \|\vec{mg}\| \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho S C_x \frac{U^2}{\sin^2 \theta} = mg \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x \sin^2 \theta}} = \frac{U_0}{\sin \theta}$$

$$\text{à cet instant, } U = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x \sin^2 \theta}} = \frac{U_0}{\sin \theta}$$

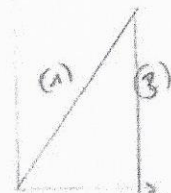
$$\text{D'après 10: dans ce cas, } x(v) = L = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{U_0}{U_0 \sin \theta} \quad \text{distance horizontale parcourue}$$

12. Lors du régime limite, l'accélération du vent est négligeable $\Rightarrow U = U_0$, soit un espacement constant entre les points de la chronophotographie. Au delà du point noté 30, on peut considérer le régime limite.

13.18

$$14. \text{ Portée du tir: } L = L_{\text{phase 1}} + L_{\text{phase 2}} = 0$$

$$L = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{U_0 \sin \theta_0}{U_0}$$



$$L_0 = \frac{U_0^2 \sin \theta_0}{g} = \frac{2 U_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

$$\frac{U_0}{g} \approx 8$$

$$\text{Rapport de L: } \frac{L}{L_0} \approx \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{2 U_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right) \cdot \frac{2}{0,8} \approx \frac{1}{5,12} \approx 2\%$$

$$15. \text{ AN: Portée du tir: } L \approx \frac{6,7^2 \cdot 0,6}{10} \cdot \ln \frac{58}{6,7} \approx \frac{6,7^2 \cdot 0,6 \cdot 2}{10} \approx 5,4 \text{ m}$$

c'est un peu plus de la moitié de x_0 indiquée sur la chronophotographie

$$16. \text{ On reprend l'ES du mouvement: } \frac{d\vec{v}}{dt} + \left(\frac{1}{2} \frac{\rho S C_x}{m} \right) U \vec{v} = \vec{g}$$

En raisonnant sur les dimensions:

$$\text{d'où } \frac{[U][T]}{[g]} = \frac{[U]^2}{[g]} \quad \frac{[U]}{[T]} \neq \frac{[g][U]^2}{[U]^2} = [g]$$

distance parcourue lors du régime intermédiaire

$$d \approx \frac{U_0^2}{g} \quad \text{soit } d \approx 4,5 \text{ m.}$$

L'approximation faite à la question 13. est valable dans que $d \ll L$, ce qui n'est pas le cas ici.

$$17. \text{ Par avar cela, il faudrait prendre } \frac{U_0^2}{g} \ll \frac{U_0^2 \cos \theta_0 \ln \frac{U_0}{U_0}}{g}$$

$$\text{soit } \cos \theta_0 \ln \frac{U_0}{U_0} \gg 1. \text{ soit } \ln \frac{U_0}{U_0} \gg 1 \Rightarrow U_0 \gg U_{00} \approx 1$$

soit diminuer U_{00} , en augmentant U_0 ; et par diminuer U_{00} , prendre un système moins large et de surface plus importante.

18. Temps de montée = temps du régime 1: $t_1 = \frac{U_0^2}{g} \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} - \frac{1}{U_0} \right)$ (*)

Temps de descente = temps du régime 3: $t_3 = \frac{L \tan \theta_0}{U_0} = \frac{\sin \theta_0 U_0}{g} \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0} U_0}{U_0} \right)$

Temps du régime intermédiaire = temps du régime 2: $t_2 = \frac{U_0^2}{g} \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0} U_0}{U_0} \right)$ (voir ci-dessus)

• Calcul de l'ODG de t_2 par raisonnement dimensionnel:

On reprend le fait que lors du régime 2, $\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \left[g \frac{U \vec{v}}{U_0^2} \right] = \left[\frac{\vec{g}}{g} \right]$

$$\frac{[U]}{[T]} = \frac{[g][U]^2}{[U]^2} = [g] \quad b=c \Rightarrow [U] = [U_0]$$

$$(a) \quad (b) \quad (c) \quad a=c \Rightarrow [T] = \frac{[U]}{[g]} = \frac{[U_0]}{[g]}$$

soit l'ordre de grandeur $t_2 \approx \frac{U_0}{g}$ AN: $t_2 \approx \frac{6.7}{10} \approx 0.7 \text{ s}$.

Durée du régime intermédiaire.

AN: $t_1 \approx 0.5 \text{ s}$; $t_2 \approx 0.7 \text{ s}$; $t_3 \approx 1.1 \text{ s}$

Ces 3 temps sont au même ordre de grandeur.

(*) D'après 7., $\frac{1}{U_0} - \frac{1}{U_0} = \frac{gt_1}{U_0^2} \Rightarrow t_1 = \frac{U_0^2}{g} \left(\frac{1}{U_0} - \frac{1}{U_0} \right)$

avec $U = \frac{U_0}{\sqrt{\sin \theta_0}}$ (11%) (force de freinage égale au poids)

$$\Rightarrow t_1 = \frac{U_0^2}{g} \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} - \frac{1}{U_0} \right)$$

(**) $t_3 = \frac{\text{distance parcourue}}{U_0} = \frac{L \tan \theta_0}{U_0} = \frac{\sin \theta_0 U_0}{g} \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0} U_0}{U_0} \right) = t_3$