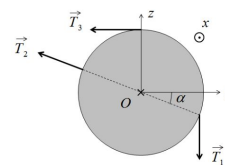


Théorème du moment cinétique

1 * Moments de tensions

Un disque vertical homogène, de rayon R , de centre O , peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal (Ox) (liaison pivot parfaite). Il est attaché à 3 fils aux points A_1, A_2 et A_3 . Chacun de ces fils exerce une tension $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ et $\vec{T}_3$ représentées ci-dessous. Calculer le moment de ces 3 forces par rapport à O .



Rép : $\vec{M}_O(\vec{T}_1) = T_1 d(-\vec{u}_x) = -T_1 R \cos \alpha \vec{u}_x$; $\vec{M}_O(\vec{T}_2) = 0$; $\vec{M}_O(\vec{T}_3) = T_3 R \vec{u}_x$

2 *Équilibre d'une balance

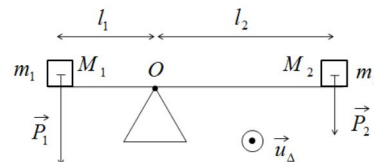
On modélise une balance équilibrée par une tige horizontale, pouvant tourner sans frottement autour d'un axe ($O\Delta$).

On note m_1 et m_2 les masses présentes dans chacun des plateaux, écartés respectivement d'une distance l_1 et l_2 de O .

1) Exprimer les moments $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1)$ et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_2)$ des poids $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$, par rapport à l'axe ($O\Delta$)

2) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer à quelle condition la balance est équilibrée.

3) Que devient le résultat précédent lorsque le point O est situé au milieu des deux plateaux ?



Rép : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1) = +m_1 g l_1$; $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_2) = -m_2 g l_2$; $m_1 l_1 = m_2 l_2$

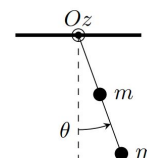
3 ** Entre le pendule simple et le pendule pesant, le pendule lesté

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.

1 - Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L} \sin \theta = 0$

2 - Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

3 - Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?



Rép : Appliquer le TMC au système des deux masses; revenir à la définition du centre de masse; non !

4 **Pendule simple couplé à des ressorts

On considère le dispositif suivant. Les deux ressorts sont identiques (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et on écarte légèrement la masse M supposée ponctuelle de sa position d'équilibre.

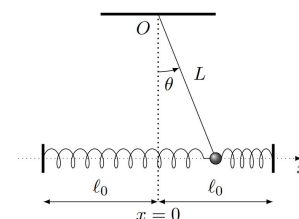
En supposant $|\theta| \ll 1 \text{ rad}$, on peut considérer que le mouvement est pratiquement horizontal.

1. Montrer que dans ce cas, on a $x = L\theta$ et $v \simeq L\dot{\theta}$.

2. En appliquant le TMC, déterminer une équation différentielle sur θ .

3. En déduire la période des oscillations.

4. Retrouver ces résultats par une méthode énergétique



Rép : Appliquer le TMC/ Δ en O élimine la tension inconnue, $\ddot{\theta} + \theta \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m} \right) = 0$; $E_{pp} = -mg \cos \theta$ (origine en O); $E_{pR} = \frac{1}{2} k x^2$

5 ** Masse attachée à une ficelle

Un point matériel M de masse m , attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée vers le bas par un opérateur à une vitesse constante $\vec{v} = -v_0 \vec{e}_z$ ($v_0 > 0$). La masse m est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe Oz , et la longueur du fil sur le plan est initialement l_0 .

1 - Choisir un système de coordonnées adaptées. Donner l'expression de la distance $r(t) = OM$ en fonction de l_0, v_0 et t .

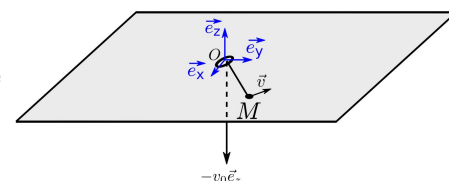
Donner l'expression du moment cinétique du point M par rapport à O en fonction des mêmes grandeurs qui ci-dessus, ainsi que de m et θ .

2 - Appliquer le théorème du moment cinétique au point M . En déduire l'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ du point M .

4 - En déduire la tension du fil exercée sur M .

5 - Calculer directement le travail de traction fourni par l'opérateur s'il fait passer la distance du mobile à l'axe de la valeur r_0 à r .

6 -*** Retrouver ce calcul par une autre méthode.



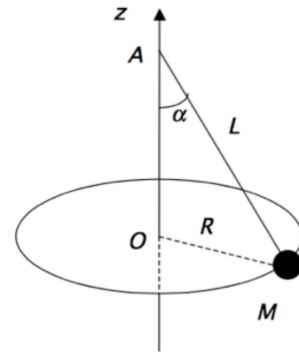
Rép : $r = l_0 - v_0 t$; $\vec{L}_O = m(l_0 - v_0 t)^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ $\vec{L}_O = \vec{cst} \vec{e}_z$; $\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{(r_0 - v_0 t)^2}$; le PFD en polaires donne $F(t) = M \frac{(r_0 v_0)^2}{(r_0 - v_0 t)^3}$; Exprimer le travail élémentaire $dW = F(t)(-dr)$ avec $F(t) = M \frac{(r_0 v_0)^2}{r^3(t)}$ puis intégrer $\Rightarrow W = \frac{1}{2} M (r_0 v_0)^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$; Utiliser le TEC.

6 *** Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Az . On donne une certaine vitesse initiale à la masse, afin de la faire tourner autour l'axe z . On note ω la vitesse angulaire ainsi atteinte. On note Oxy le plan dans lequel ce mouvement a lieu, et α l'angle qui s'établit entre l'axe et le fil. On suppose un régime stationnaire atteint : α et ω restent constants. On utilisera la base cylindrique dans le plan Oxy , d'axe Oz . La pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_z$.

1 - Étant donné que la force de tension du fil sur la masse est inconnue, par rapport à quel point va-t-il être judicieux de calculer les moments des forces ?

2 - À l'aide du théorème du moment cinétique, donner l'expression de l'angle α en fonction de L, ω et g .



Rép : Appliquer le TMC vectoriel en A pour éliminer la tension inconnue ; $\vec{L}_A = \ell m \omega \sin \alpha (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_z)$; $\vec{M}_A(\vec{P}) = mg \ell \sin \alpha \vec{e}_\theta$; Appliquer le TMC en n'oubliant pas de dériver $\vec{e}_r$ dans $\vec{L}_A$, on arrive à $\cos \alpha = \frac{g}{L \omega^2}$

7 *** Trois méthodes pour l'étude d'un même mouvement

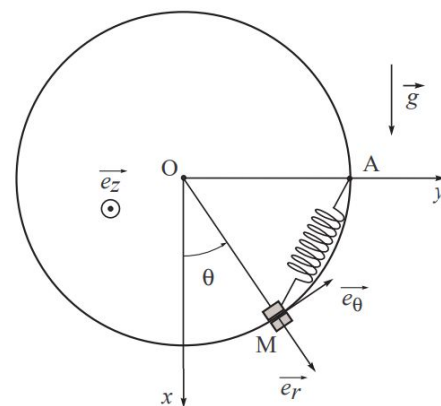
Un point matériel de masse m est assujéti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O . Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable. On notera $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta)$, et on rappelle $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

1) Faire un dessin précis des forces, en introduisant α . Exprimer l'allongement du ressort en fonction de α notamment.

2) Établir l'équation du mouvement du mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :

- le théorème du moment cinétique ;
- la relation fondamentale de la dynamique ;
- le bilan énergétique.

3) Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.



Rép : Faire un BEAU dessin est indispensable pour pouvoir raisonner $\Delta \ell = 2R \sin \alpha$ (raisonner sur la "moitié" OAI du triangle OAM, on a posé $\alpha = \frac{\pi/2 - \theta}{2}$) ; $M_z(\vec{R}) = 0$; $M_z(\vec{P}) = -mgR \sin \theta$; $M_z(\vec{T}) = +T.OI$ (bras de levier) $= 2kR^2 \sin \alpha \cos \alpha = kR^2 \cos \theta$; $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta - \frac{k}{m} \cos \theta = 0$