

Théorème du moment cinétique

Ce qu'il faut connaître/ savoir faire

- Comment est défini le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O ? Et par rapport à un axe Oz orienté par le vecteur $\vec{e}_z$?
- Comment est défini le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O ? Et par rapport à un axe Oz orienté par le vecteur $\vec{e}_z$?
- Comment s'écrit le théorème du moment cinétique? (préciser les hypothèses)
- Calculer un moment cinétique, interpréter son sens (moment vectoriel) ou son signe (moment)
- Calculer le moment d'une force, interpréter son sens (moment vectoriel) ou son signe (moment)
- Utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à un point ou par rapport à un axe.

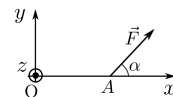
EC1 - Calculer et interpréter un moment cinétique

Un point matériel de masse m suit la trajectoire $x(t) = v_0 t, y(t) = y_0, z(t) = 0$, avec $v_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

- 1 - Tracer la trajectoire.
- 2 - Donner l'expression du moment cinétique en O .
- 3 - Vérifiez que sa direction et son sens sont cohérents (règle de la main droite)
- 4 - Donner enfin l'expression du moment cinétique de M par rapport à l'axe Oz . Vérifier que son signe est cohérent (en termes de sens de rotation autour de l'axe Oz).
- 5 - Vérifiez le calcul en utilisant le bras de levier

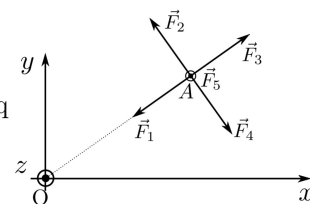
EC2 - Calculer et interpréter le moment d'une force

- 1 - Sur le schéma ci-contre, le point A a pour coordonnées $(x_0, 0, 0)$. Une force $\vec{F}$ s'applique sur ce point.
 - a - Donner l'expression du moment $\vec{\Gamma}_O$ de cette force (en fonction de la norme F de $\vec{F}$, de α et de x_0).
 - b - Donner également l'expression du moment scalaire Γ_{Oz} . Expliquer son signe.



- 2 - On s'intéresse au schéma ci-contre.

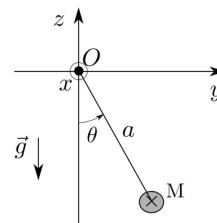
Donner les expressions du moment scalaire par rapport à l'axe Oz , orienté selon $+\vec{e}_z$, de chacune des cinq forces apparaissant sur le schéma (en fonction de leur norme $F = \|\vec{F}\|$ et de $d = OA$).



C3 - Pendule simple : A SAVOIR REFAIRE LES YEUX FERMES !

On considère un pendule dont toute la masse est localisée au point M . Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note a sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec z axe vers le haut et $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$ constante. On fera usage des coordonnées cylindriques.

- 1 - Donner l'expression du moment cinétique de la masse par rapport à O , en fonction de $a, \dot{\theta}, m$ et d'un vecteur bien choisi.
- 2 - Donner l'expression du moment de chacune des forces s'exerçant sur la masse, par rapport à O .
- 3 - Rappeler l'énoncé du TMC. L'appliquer au cas présent afin d'en déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.
- 4 - Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre. On supposera qu'à $t = 0$ le pendule est en $\theta = 0$ et qu'on lui communique une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.
- 5 - Reprendre l'étude avec le TMC par rapport à un axe. Comparer les méthodes.
- 5 - Exprimer la tension du fil en fonction de θ et $\dot{\theta}$.



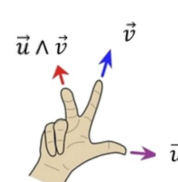
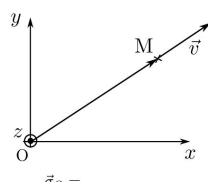
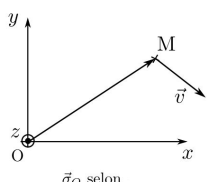
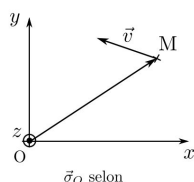
I. Moment cinétique

Moment cinétique par rapport à un point O

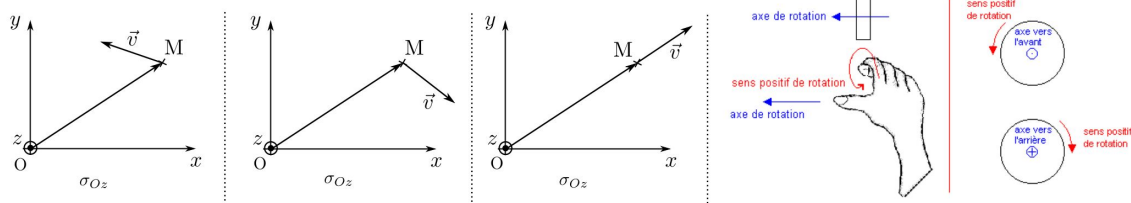
Soit un point matériel M (masse m et vitesse $\vec{v}$). Son moment cinétique par rapport à un point O est défini par :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}.$$

Ex : Donner la direction de $\vec{\sigma}_O$ dans les trois cas :



Donner le signe de σ_{Oz} dans les trois cas :



Moment cinétique d'un point par rapport à un axe Oz

- Soit un point matériel M (masse m et vitesse $\vec{v}$). - Soit un axe Oz dont la direction est définie par un vecteur unitaire $\vec{e}_z$.
Le moment cinétique de M par rapport à l'axe Oz est :

$$\sigma_{Oz} = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z.$$

Remarques :

- Il s'agit du moment cinétique par rapport à un point de l'axe, projeté sur cet axe via le produit scalaire $\cdot \vec{e}_z$.
- Il ne dépend pas du point O choisi sur l'axe. (en effet : $\sigma_{O'z} = (\overrightarrow{O'M} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z = \underbrace{(\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z}_{\text{nul car } \overrightarrow{O'O} // \vec{e}_z} + (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z = \sigma_{Oz}$)
- Signe de σ_{Oz} : $\begin{cases} \text{Si } M \text{ tourne autour de l'axe dans le sens direct (règle du tire-bouchon)} \Rightarrow \sigma_{Oz} > 0. \\ \text{Si } M \text{ se dirige exactement vers l'axe ou s'en éloigne exactement, alors } \sigma_{Oz} = 0. \end{cases}$

II. Moment d'une force

Moment d'une force par rapport à un point ou un axe

Soit une force $\vec{F}$ (ou une résultante de forces) s'appliquant en un point M . Par analogie avec le moment cinétique, on a les définitions

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}; \quad \Gamma_{Oz} = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{e}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$$

.

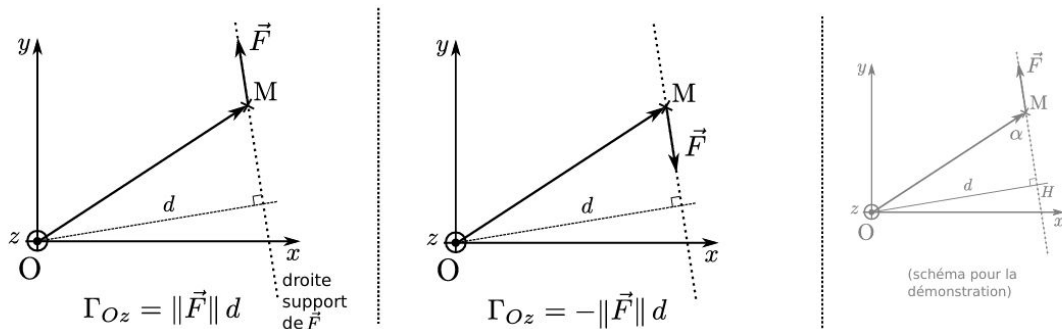
On peut calculer le moment d'une force en calculant directement le produit vectoriel : soit dans une base, soit en utilisant que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Il existe une autre méthode, souvent plus pratique, celle du bras de levier.

Calcul par la méthode du bras de levier

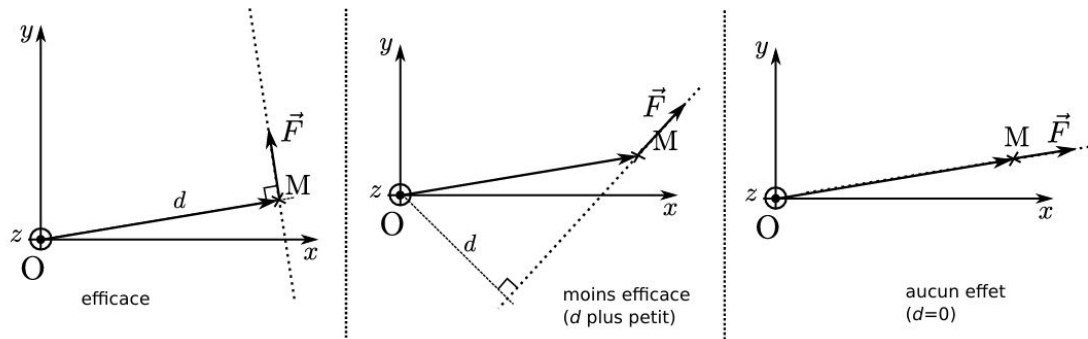
Pour le calcul d'un moment par rapport à un axe, lorsque la force est dans le plan perpendiculaire à l'axe :

- tracer la droite qui passe par M et qui est portée par $\vec{F}$ (droite support de la force).
- Soit d la distance entre l'axe et cette droite.
- Le moment de $\vec{F}$ vaut $\Gamma_{Oz} = \pm \|\vec{F}\| d$.
- Si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens direct, c'est un $+$. Si sens indirect, c'est un $-$.



Démonstration : $|\Gamma_{Oz}| = |(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z| = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| \times \|\vec{e}_z\|$ (par de terme en cos car $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ et $\vec{e}_z$ sont colinéaires). Or pour un produit vectoriel, on a $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = \|\overrightarrow{OM}\| \|\vec{F}\| \underbrace{\sin \alpha}_{=d/\|\overrightarrow{OM}\|}$.

Le "bras de levier" permet de comprendre intuitivement l'efficacité avec laquelle $\vec{F}$ tend à faire tourner le point M :



Exemple : EC1

III. Théorème du moment cinétique

Tout comme le PFD relie la dérivée de la quantité de mouvement aux forces, le théorème du moment cinétique relie la dérivée du moment cinétique aux moments des forces.

TMC pour un point matériel par rapport à un point O fixe

- On se place dans un référentiel galiléen,
- et on considère un point O fixe.

Soit alors un point matériel M de masse m , de moment cinétique en O $\vec{\sigma}_O$, soumis à des forces $\vec{F}_i$. Alors :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum_i \vec{\Gamma}_O(\vec{F}_i).$$

TMC pour un point matériel par rapport à un axe Oz fixe

Même chose, mais on considère un axe Oz fixe. Alors :

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = \sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i)$$

Démonstration :

On applique le principe fondamental de la dynamique au point M (d'où l'importance du référentiel galiléen) : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$.

Dérivons $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ là par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{dm\vec{v}}{dt}}_{=\sum_i \vec{F}_i} + \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{=\vec{v}} \wedge m\vec{v}.$$

Or $\vec{v} \wedge m\vec{v} = m \times \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Donc il reste :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i}_{=\vec{\Gamma}_O(\vec{F}_i)}.$$

Remarque : on voit dans la démonstration qu'il est nécessaire que le point O soit fixe dans le référentiel d'étude, car sinon $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}(M) - \vec{v}(O)$ n'est pas la vitesse du point M . Il existe donc une version par rapport à un point ou à un axe pas nécessairement fixe, mais qui n'est pas au programme.