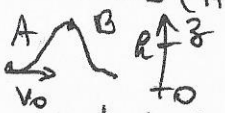


Kovler coaster

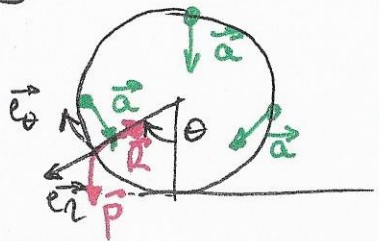
1) Vitesse en fm d'accélération $v_0 = a \times t_a = 1,15 \times 9,8 \times 2,5$
 $v_0 = 28 \text{ m s}^{-1}$ (2)

Frottements négligés (1) \Rightarrow conservation Eméca entre le bas (A) et le haut (B):
 $\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgh$.



le train arrive en B si $v_B^2 \geq 0 \Leftrightarrow h \leq \frac{v_0^2}{2g}$ - on vérifie } $h = 37 \text{ m}$
 $\frac{v_0^2}{2g} = 39 \text{ m}$, c'est bon! (2)

2)



course: $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$ (Frenet)

(2) or ici $\begin{cases} \vec{T} = \vec{e}_\theta \\ \vec{N} = -\vec{e}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \dot{v} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$
 (on a aussi $\vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \dots$)

3) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le train ralentit $\Rightarrow \dot{\theta} < 0$

(3) $\theta = \pi$, — c'est à vitesse minimale $\dot{\theta} = 0$
 $\theta = \frac{\pi}{2}$ — accélère $\Rightarrow \dot{\theta} > 0$

Où les flèches vertes - (toujours vers l'intérieur, $-\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$)

4) PFD au train dans RTSG: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$.

En prof sur \vec{e}_θ : $mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$

$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$ (2)

Equadiff non linéaire \Rightarrow on ne sait pas résoudre (pas de petits angles!) (1)

5)

def dérivée (X, t):

(1) $X_p = X[1]$ # x point
 $X_{pp} = -g/R * np.sin(X[0])$ # x point point
 return [Xp, Xpp] (1)
 theta0 = 0

dtheta0 = v0/R # (et pas v0!) (1)
 res = odeint(dérivée, [theta0, dtheta0], tabt)

En effet: on trouve directement \dot{x} = 1^{re} composante du tableau X

• on calcule $\ddot{x} = -\frac{g}{R} \sin x$ (equa diff)

(la variable est notée ici x, pas theta...)

⚠ erreurs classiques: TOUT doit être en python... sinus inconnu sans np
 pas de x: multiplication notée *
 pas d'indice

6) L'arrivée correspond à $\theta = 2\pi \Rightarrow t_f \approx 5s$ - (1)

IMPORTANT!

Traineau sur la glace

1) PFD appliqué à 1 élément de corde de masse nulle :



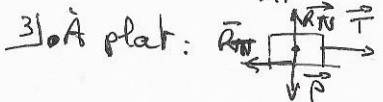
$$M \vec{a} = \vec{T}_g + \vec{T}_d \Rightarrow \boxed{\vec{T}_d = -\vec{T}_g} \quad (2)$$

les tensions à droite et gauche sont égales.

2) lois de Coulomb :



$$\left. \begin{aligned} R_T &= \mu_s R_N \text{ si glissement} \\ R_T &\leq \mu_s R_N \text{ si non glissement} \end{aligned} \right\} (2)$$

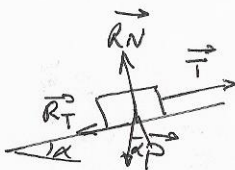


PFD au traineau dans RTSU :

$$\left\{ \begin{aligned} M \ddot{x} &= T - R_T \\ 0 &= Mg - R_N \end{aligned} \right. \Rightarrow R_N = Mg \Rightarrow R_T = \mu_d Mg$$

$$\boxed{M \ddot{x} = T - \mu_d Mg} \quad (1) \quad (3)$$

• Incliné



De même,

$$\left\{ \begin{aligned} M \ddot{x} &= T - R_T - Mg \sin \alpha \\ 0 &= Mg \cos \alpha - R_N \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow R_N = Mg \cos \alpha \Rightarrow R_T = \mu_d Mg \cos \alpha$$

$$\text{Donc } \boxed{M \ddot{x} = T - \mu_d Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha} \quad (2)$$

$$\text{Soit } M \ddot{x} = T - Mg (\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha) \quad (3)$$

On peut donc écrire (2) sous la forme (1) en posant

$$\boxed{\mu'_d = \mu_d \cos \alpha - \sin \alpha} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \alpha \text{ petit} \end{matrix}$$

4) Au démarrage, à la limite de glissement, on a $R_T = \mu_s Mg$
l'équat° 1 donne T_{mini} à l'accélération nulle :

$$T_{\text{mini}} = \boxed{F_0 = \mu_s Mg}$$

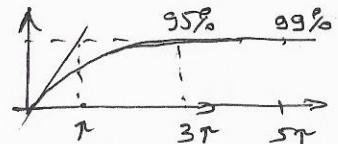
$$\text{AN: } \boxed{F_0 = 8 \cdot 10^{-2} \times 500 \times 10 = 400 \text{ N}} \quad (3)$$

5) (1) s'écrit alors $M \ddot{x} = F_0 - \beta v - \mu_d Mg$

$$\Leftrightarrow \dot{v} + \frac{\beta}{M} v = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{M}$$

soit $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\infty}}{\tau}$ (3) avec $\tau = \frac{M}{\beta}$ $v_{\infty} = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta}$ (3)

6) (3) est 1 eq diff d'ordre 1, on atteint v_{∞} à 5% au bout de 3τ (course!) :



$$\Rightarrow t_1 = 3M/\beta$$

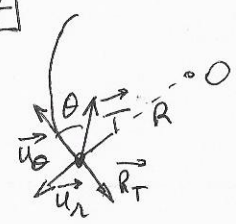
$$\Leftrightarrow \boxed{\beta = \frac{3M}{t_1}} \quad (2)$$

Alors (3) $\Rightarrow v_{\infty} = v_0 = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta} \Rightarrow \boxed{F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg}$ (1)

$$\text{AN: } \boxed{\beta = \frac{3 \times 500}{5} = 300 \text{ kg s}^{-1}} \quad (1)$$

$$\boxed{F_0 = 300 \times 3 + 5 \cdot 10^{-2} \times 500 \times 10 = 1,1 \text{ kN}} \quad (1)$$

7)



PFD au traineau dans RTSU, en prof ds le repere cylindrique: (moteur circ uniforme)

$$\left\{ \begin{aligned} -m \frac{v_0^2}{R} &= -T \sin \theta \\ 0 &= T \cos \theta - \mu_d Mg \end{aligned} \right. \quad (2)$$

on en tire $\tan \theta = \frac{v_0^2}{R \mu_d Mg}$ (2). D'autre part, le

theoreme de Pythagore fournit $T^2 = T_{\text{cos}}^2 + T_{\text{sin}}^2 = \left(\frac{m v_0^2}{R}\right)^2 + (\mu_d Mg)^2$

$$\Rightarrow \boxed{T = \sqrt{(\mu_d Mg)^2 + \left(\frac{R v_0^2}{R}\right)^2}} \quad (2)$$

Projectaire d'un volant de badminton ENS et ESPCI, R, 2015

1. Système { volant $M(m)$ } on assimile le volant à un point matériel $M(m)$

Référentiel terrestre $R \equiv$ galiléen

BDF: poids: $\vec{P} = m\vec{g}$

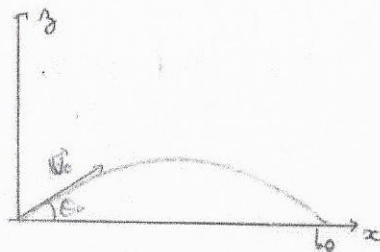
PFD: $m\vec{a}(M)_R = \vec{P}$

$$\int m\vec{x} = 0$$

$$\int m\vec{y} = -mg$$

Par intégration:
$$\begin{cases} \dot{x} = U_0 \cos \theta_0 \\ \dot{y} = -gt + U_0 \sin \theta_0 \end{cases}$$

avec $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = U_0 \cos \theta_0$
 $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = U_0 \sin \theta_0$



puis
$$\begin{cases} x(t) = U_0 t \cos \theta_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + U_0 t \sin \theta_0 \end{cases}$$
 (1)
 Equations horaires du mouvement.

On remplace t par obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire:

$$t = \frac{x}{U_0 \cos \theta_0} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{U_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 + x \tan \theta_0$$
 (1)

C'est une trajectoire parabolique (voir schéma ci-dessus) (1)

Portée L_0 obtenue par $y(L_0) = 0$ soit $L_0 = \frac{2U_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$

$$\text{soit } L_0 = \frac{U_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$
 (2)

2. $[L_0] = \frac{[U_0^2]}{[g]} = \frac{L^2 T^{-2}}{L T^{-2}} = L$ L_0 est bien homogène à une longueur (1)

Cas limites simples: si $U_0 = 0$, le volant ne bouge pas, $L_0 = 0$, ce qui est vérifié par la formule.

si $\theta_0 = 0$, $y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{U_0^2} x^2$; $y(L_0) = 0$ ssi $L_0 = 0$
 portée nulle (2)

si $\theta_0 = \pi/4$, L_0 est maximale.

si $\theta_0 = \pi/2$, $x(t) = 0$, $L_0 = 0$.

3. U_0 fixé, L_0 est max si $\sin 2\theta_0$ est max et donc égal à 1. (1)
 soit $\theta_0 = \pi/4$. Par un angle $\theta_0 = \pi/4$, le volant va le plus loin possible.

4. $\vec{F} = -\frac{1}{2} \rho S C_x U \vec{U}$ $[\vec{F}] = M.L.T^{-2}$ $[U] = L.T^{-1}$
 $[C_x] = M.L^{-3}$
 $[S] = L^2$

soit $[C_x] = \frac{M.L.T^{-2}}{M.L^{-3}.L^2.L.T^{-2}} = 1$ C_x est sans dimension (2)

5. on ajoute la force de traînée au système précédent.

PFD: $m\vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - \frac{1}{2} \rho S C_x U \vec{U}$

soit $\frac{d\vec{U}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\rho S C_x U}{m} \vec{U} = \vec{g}$ (2)

On nous demande de déterminer une solution particulière qui soit un mouvement rectiligne uniforme $\Rightarrow \vec{U}_{part} = cte$ soit $\frac{d\vec{U}_{part}}{dt} = \vec{0}$

On en déduit: $U_{part} \vec{U}_{part} = \frac{2mg}{\rho S C_x}$ en norme $U_{part} = U_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}}$ (2)

Le mouvement rectiligne est vertical (selon \vec{g}) et de vitesse U_0 .

6. on réécrit l'équation du mouvement: $\frac{d\vec{U}}{dt} + g \frac{U \cdot \vec{U}}{U_0^2} = \vec{g}$ (1)

7. On peut négliger la pesanteur si $mg \ll \frac{1}{2} \rho S C_x U^2$ $\frac{\rho}{m} = \frac{g}{U_0^2}$ (1)
 soit $U \gg \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}}$ En faisant cette hypothèse: $\frac{d\vec{U}}{dt} + g \frac{U \cdot \vec{U}}{U_0^2} = \vec{0}$

En projetant selon le vecteur \vec{U} : $\frac{dU}{dt} = -g \frac{U^2}{U_0^2}$ $\Leftrightarrow -\frac{dU}{U^2} = +g \frac{dt}{U_0^2}$

Puis en intégrant de chaque côté: $\left[\frac{1}{U} \right]_0^t = \left[\frac{gt}{U_0^2} \right]_0^t$

soit $\frac{1}{U(t)} - \frac{1}{U_0} = \frac{gt}{U_0^2}$

soit $U(t) = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_0^2}}$ L'inverse de U est une droite.

(2)

8. $\frac{1}{U(t/2)} - \frac{g}{U_0} \Leftrightarrow \frac{1}{U_0} = \frac{gt/2}{U_0^2}$ soit $\boxed{t/2 = \frac{U_0^2}{U_0 g}}$ (2) $\hat{=} \frac{1}{kU_0}$

Sur la chronophotographie, on lit $U_0 = 58 \text{ m/s}$ soit $\frac{U_0}{2} = 29 \text{ m/s}$.

AN: $t/2 = \frac{6,7^2}{58 \cdot 10} \approx 7,7 \cdot 10^{-2} \text{ s}$. (2)

Les points sont enregistrés toutes les $50 \text{ ms} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ donc $t/2$ est entre les points 2 et 3, là où la distance parcourue entre 2 points est la moitié de la distance entre les 2 premiers points - $t/2$ compris entre 100 et 150 ms OK.

9. En projetant sur \vec{ux} la relation obtenue en 7: $\frac{dU_x}{dt} + \frac{gU_x U}{U_0^2} = 0$

soit $\frac{1}{U} = \frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_0^2} \Leftrightarrow \frac{dU_x}{dt} + \frac{g}{U_0^2} \left(\frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_0^2} \right) U_x = 0$

(séparation des variables) $\Leftrightarrow \frac{dU_x}{U_x} = - \frac{g/U_0^2}{\frac{1}{U_0} + \frac{gt}{U_0^2}} dt = - \frac{U_0 g dt / U_0^2}{1 + \frac{gU_0 t}{U_0^2}}$

Par intégration: $\ln U_x = - \ln \left(1 + \frac{gU_0 t}{U_0^2} \right) + c_0$

à $t=0$ $U_x(0) = U_0 \cos \theta_0 \Rightarrow c_0 = \ln U_0 \cos \theta_0$

Conclusion: $\boxed{\ln U_x = - \ln \left(1 + \frac{gU_0 t}{U_0^2} \right) + \ln U_0 \cos \theta_0}$

soit $\boxed{U_x(t) = \frac{U_0 \cos \theta_0}{1 + \frac{gU_0 t}{U_0^2}}$

puis par intégration:

$\boxed{x(t) = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \left(1 + \frac{gU_0 t}{U_0^2} \right)}$ (3)

10. D'après ce qui précède, on a: $\boxed{x(v) = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{U_0}{U}}$ (2)

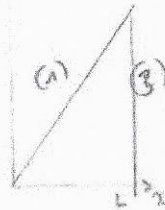
11. $\vec{F} = \vec{mg} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho S C_x U^2 \sin^2 \theta = mg \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x \sin^2 \theta}} = \frac{U_0}{\sin \theta}$

à cet instant, $U = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x \sin^2 \theta}} = \frac{U_0}{\sin \theta}$

D'après 10, dans ce cas, $x(v) = \boxed{L = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{U_0}{U}}$ distance horizontale parcourue

12. Lors du régime limite, l'accélération du volant est négligeable $\Rightarrow U = \frac{U_0}{\sin \theta}$, soit un espacement constant entre les points de la chronophotographie. Au delà du point noté 30, on peut considérer le régime limite.

13.



14. Portée du tir: $L = L_x + L_y = 0$ (phase 1) (phase 3)

$L = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{U_0 \sin \theta_0}{U_0}$

$L_0 = \frac{U_0^2 \sin^2 \theta_0}{g} = \frac{2U_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$ $\frac{U_0}{U_0} \approx 8$
Rapport de L suite: $\frac{L}{L_0} = \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{2U_0^2 \sin \theta_0} \ln \frac{U_0 \sin \theta_0}{U_0} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{0,8} \approx \frac{1}{51,2} \approx 2\%$

15. AN Portée du tir: $L \approx \frac{6,7^2 \cdot 0,6}{10} \ln \frac{58}{6,7} \approx \frac{6,7^2 \cdot 0,6 \cdot 2}{10} \approx 5,6 \text{ m}$
c'est un peu plus de la moitié de x_0 indiquée sur la chronophotographie

16. On reprend l'ED du mouvement: $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{g} \frac{\rho S C_x}{m} U \vec{v} = \vec{g}$

En raisonnant sur les dimensions: $\frac{[U]}{[T]} + \frac{[g][U]}{[U]^2} = [g]$

soit $\frac{[U][T]}{[g]} = \frac{[U]^2}{[g]}$ distance parcourue lors du régime intermédiaire: $\boxed{d = \frac{U_0^2}{g}}$ soit $d \approx 4,5 \text{ m}$.

l'approximation faite à la question 13. est valable dans que $d \ll L$, ce qui n'est pas le cas ici.

17. Par avar cela, il faudrait prendre $\frac{U_0^2}{g} \ll \frac{U_0^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{U_0}{U_0}$ soit $\cos \theta_0 \ln \frac{U_0}{U_0} \gg 1$. soit $\ln \frac{U_0}{U_0} \gg 1 \Rightarrow U_0 \gg U_0 \cdot e^4$ soit diminuer U_0 , en augmentant U_0 ; et par diminuer U_0 , prendre un système mesurant et de surface plus importante.

18. Temps de montée = temps du régime 1: $t_1 = \frac{U_0^2}{g} \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} - \frac{1}{U_0} \right)$ (*)

Temps de descente = temps du régime 3: $t_3 = \frac{L \tan \theta_0}{U_0} = \frac{\sin \theta_0 U_0}{g} \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0} U_0}{U_0} \right)$ (**)

Temps du régime intermédiaire = temps du régime 2: $t_2 \sim \frac{U_0^2}{g}$ (voir ci-dessus)

• Calcul de l'ODG de t_2 par raisonnement dimensionnel:

On reprend le fait que lors du régime 2, $\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \left[g \frac{\vec{v}}{U_0} \right] = \left[\frac{g}{U_0} \right]$

$$\frac{[U]}{[T]} \sim \frac{[g][U]^2}{[U]^2} = [g] \quad b=c \Rightarrow [U] = [U_0]$$

$$\frac{[U]}{[T]} \sim \frac{[g]}{[U]} = \frac{[U]}{[g]} \quad a=c \Rightarrow [T] = \frac{[U]}{[g]} = \frac{[U]}{[g]}$$

soit l'ordre de grandeur $t_2 \sim \frac{U_0}{g}$ AN: $t_2 \sim \frac{67}{10} \sim 6,7 \text{ s}$.

Durée du régime intermédiaire

AN: $t_1 \sim 0,5 \text{ s}$; $t_2 \sim 0,7 \text{ s}$; $t_3 \sim 1,1 \text{ s}$

Ces 3 temps sont du même ordre de grandeur.

(*) D'après 7., $\frac{1}{U(t)} - \frac{1}{U_0} = \frac{gt}{U_0^2} \Rightarrow t_1 = \frac{U_0^2}{g} \left(\frac{1}{U(t)} - \frac{1}{U_0} \right)$

avec $U = \frac{U_0}{\sqrt{\sin \theta}}$ (11°) (force de freinage égale au poids)

$$\Rightarrow t_1 = \frac{U_0^2}{g} \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0}}{U_0} - \frac{1}{U_0} \right)$$

(**) $t_3 = \frac{\text{distance parcourue}}{U_0} = \frac{L \tan \theta_0}{U_0} = \frac{\sin \theta_0 U_0}{g} \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta_0} U_0}{U_0} \right) = t_3$