Force Centrale

[1] 1)  M posé sur Terre décrit 1 cercle de rayon $R_T \cos\lambda$ à la vitesse angulaire $\Omega \Rightarrow v_\Omega = \Omega R_T \cos\lambda$

donc $E_B = \frac{1}{2} m (\Omega R_T \cos\lambda)^2 - G \frac{\Pi_T m}{R_T}$

2) PFD sur traj circulaire de rayon R_T parcourue à vitesse uniforme : (1) $m \frac{v^2}{R_T} = \frac{G m \Pi_T}{R_T^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{G m \Pi_T}{2 R_T} = E_c$

donc $E_m = \frac{G m \Pi_T}{2 R_T} - \frac{G m \Pi_T}{R_T} = - \frac{G m \Pi_T}{2 R_T}$ (sinon, utiliser $E = -\frac{K}{2a}$)

3) A l'équateur, $\cos\lambda = 1$, E_B est max, l'énergie à fournir par la fusée est min

[2] Ellipse de transfert

savoir y penser !

$\underbrace{\quad}_{\text{2 expressions du poids}}$

$m g_0 = m \frac{G \Pi_T}{R_T^2}$

$\Rightarrow \boxed{G \Pi_T = g_0 R_T^2}$ ♡

1) Voir exo 1 : (1) $\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{G \Pi_T}{R_T}}$ or

Donc $\boxed{v_0 = \sqrt{g_0 R_T}} \overset{AN}{=} 7{,}9$ km/s.

2) Alors $v_1 = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_1}} \underset{\text{tour}}{\overset{\text{sur 1}}{=}} \frac{2\pi r_1}{T_1}$ $T_1 \leftarrow 24h$ $\Longrightarrow g_0 R_T^2 T_1^2 = 4\pi^2 r_1^3$ (ou 3e loi Kepler)

$\Rightarrow r_1 = \left(\frac{g_0 R_T^2 T_1^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \overset{AN}{=} 42 \cdot 10^3$ km $\Rightarrow v_1 \overset{AN}{=} 3{,}05$ km s^{-1}

3) En P, la vitesse doit augmenter pour ↗ Em qui doit être celle de l'ellipse, (de m̂ en A pour acquérir Em du grand cercle). $E_{ellipse} = - \frac{G \Pi m}{2a} = cste = \begin{cases} E_{c_P} - \frac{G \Pi m}{R_T} \\ E_{c_A} - \frac{G \Pi m}{r_1} \end{cases}$

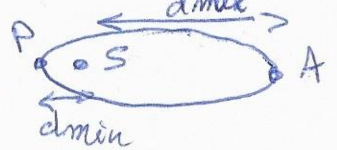
Soit $\frac{1}{2} m v_0'^2 = - G \Pi m \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{R_T}\right) \Rightarrow v'_0 = \sqrt{2 G \Pi \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a}\right)}$

et $v'_1 = \sqrt{2 G \Pi \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)}$

de P à A, le satellite décrit 1/2 ellipse, donc $T_{P \to A} = \frac{T}{2}$

avec (3e loi Kepler) : $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{G \Pi_T} = \frac{a^3}{g_0 R_T^2}$

donc $T_{P \to A} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{g_0 R_T^2}} \overset{AN}{=} 3{,}14 \sqrt{\frac{[(42\,000 + 6400) 10^3 / 2]^3}{10 \times (6400 \cdot 10^3)^2}} = 1{,}8 \cdot 10^4$ s $= 5$ h

Comète de Haley 1) 

2) 3e loi K : $\left.\frac{T^2}{a^3}\right)_{Halley} = \frac{4\pi^2}{G \Pi_S} = \left.\frac{T^2}{a^3}\right)_{Terre}$ (indep de l'astre autour du soleil)

donc $a_{Halley} = a_{Terre} \left(\frac{T_{Halley}}{T_{Terre}}\right)^{2/3} \overset{AN}{=} 1 ua \left(\frac{76}{1}\right)^{2/3} = 17{,}9$ ua

donc $d_{max} = 2 a_{Halley} - d_{min} = 35{,}2$ ua

3) d_{min} correspond à $\theta = \pi$: $d_{min} = \frac{p}{1+e}$

d_{max} —— $\theta = 0$ $d_{max} = \frac{p}{1-e}$

Donc $(1+e) d_{min} = (1-e) d_{max} \Rightarrow e(d_{min} + d_{max}) = d_{max} - d_{min}$

$\Rightarrow e = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}} \overset{AN}{=} 0{,}96$

puis $p = d_{min}(1+e) \overset{AN}{=} 1{,}15$ ua

Expérience de Rutherford

1) $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2eZe}{r^2}\vec{e_r} = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ avec $K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}$, dérive de $\frac{-K}{r} = E_p(r)$

2) Seule force $\vec{F}$ conservative $\Rightarrow E_m = \text{cste} = \frac{1}{2}mv_0^2$ (à $t=0$)

3) Seule force $\vec{F}$ centrale $\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = 0$, à $t=0$, $\vec{\sigma_0} = mv b_0 \vec{e_z}$

et $\vec{\sigma_0} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z}$ ($\vec{OM} \wedge m\vec{v}$ en polaires $\Rightarrow$ cf cours)

4) $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r} = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] + \frac{K}{r}$. or $r\dot{\theta} = \frac{\sigma_0}{mr}$,

donc $E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\sigma_0^2}{m^2r^2}\right) + \frac{K}{r} \Rightarrow E_p^*(r) = \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}$

5) Pour $r = r_{min}$, $\dot{r} = 0 \Rightarrow E_m = \frac{\sigma_0^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} \Leftrightarrow r^2E_m + Kr - \frac{\sigma_0^2}{2m} = 0$

eq du 2d degré en r, $\Delta = K^2 + 2\frac{\sigma_0^2}{m}E_m = K^2 + 2\frac{(mv_0b_0)^2}{m}\frac{1}{2}mv_0^2$

$= K^2 + (mb_0v_0^2)^2$

$\Rightarrow r_{min} = \frac{+K + \sqrt{\Delta}}{2E_m} = \frac{K}{mv_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mb_0v_0^2}{K}\right)^2}\right]$

Modèle de Bohr

1) $\vec{F} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\vec{e_r}$, $E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ ($\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$)

Fondamental !

2) Traj circulaire, vitesse uniforme, PFD en proj sur $\vec{e_r}$:

$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ et $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}}$

donc $E_m = E_p + E_c = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

3) On a donc $E_m = \frac{E_p}{2}$

4) Mvt circulaire, $L_p = mr_n^2\dot{\theta}$, or $\dot{\theta} = \frac{v}{r_n} \Rightarrow L_p = mr_nv$

$\Leftrightarrow L_p = \sqrt{\frac{mr_ne^2}{4\pi\varepsilon_0}}$

5) $L_p = n\hbar \Rightarrow r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{me^2}$

6) Donc $E_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$

AN : $E_0 = 2{,}2\ 10^{-18}$ J ($= 13{,}6$ eV)

Freinage dans l'atmosphère

1) Déjà vu, $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, $E_m = -\frac{GM_T m}{2r}$

2) Resistant, $\frac{dE_m}{dt} < 0$

3) $r \searrow$, trajectoire en spirale

4) Si $r \searrow$ et que la traj reste circulaire $v \nearrow$ $\left(v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}\right)$
le satellite freiné accelère !

5) a) $\vec{f}$ est opposée à la vitesse $\Rightarrow$ $\underset{1\,\text{tour}}{W(\vec{f})} = -f \times 2\pi r$

$= -\alpha m v^2 \times 2\pi r$

$\Rightarrow$ $= -\alpha m \frac{GM_T}{\cancel{r}} \times 2\pi \cancel{r}$

seule force non conservative $= -2\pi \alpha G M_T m$

Or $\Delta E_m \overset{\text{th}}{=} W(\vec{f}) \Rightarrow \boxed{\Delta E_m = -2\pi\alpha G M_T m}$

b) $\Delta E_m = E_{m\,\text{après}} - E_{m\,\text{avant}}$

$= -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r-\Delta r} - \frac{1}{r}\right) \overset{\text{enoncé}}{=} -GM_T m \frac{\Delta r}{2r^2} \overset{a)}{=} -2\pi\alpha G M_T m$

Donc $\Delta r = 4\pi\alpha r^2 = 82\ \text{cm}$

c) Perte de Δh en $N = \frac{\Delta h}{\Delta r} = 12\,200$ tours.

or $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} = 5300\,s$ pour 1 tour

$\Rightarrow$ il faut $NT = 750$ jours.