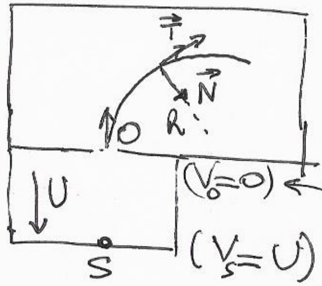
Spectrométrie de masse



← choix de la masse électrique

1) Au choix : (méthode 2 plus simple ?)

① Appliquons le TEc à l'ion entre S et O :

$$E_{cO} - \cancelto{0}{E_{cS}} = W_{O\to S}(\vec{F_{el}}) \quad \text{(seule force)}$$

or $\vec{F_{el}}$ dérive de l'énergie potentielle qV :

$$W_{Fel} = -\Delta[qV]_S^O = q(V_S - V_O) = qU$$

Soit $\frac{1}{2} m v_0^2 = qU \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$

② l'ion ne subit que $\vec{F_{el}}$, conservative ⇒ son énergie mécanique est cste :

$$Em_S = Em_O$$

$$\Leftrightarrow qU + \underbrace{0}_{E_{cS}} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \underbrace{0}_{E_{pO}} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

2) Dans la chambre, l'ion ne subit que la force magnétique $\vec{F_m} = q(\vec v \wedge \vec B)$, toujours $\perp \vec v$, donc ne travaillant pas $\Rightarrow \boxed{\Delta E_c = W(\vec{F_m}) = 0}$

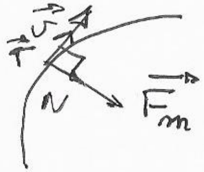
Donc $\boxed{v = cste = v_0}$

3) PFD pour l'ion dans RTSG : $m\vec a = q\vec v \wedge \vec B$.

Dans le repère de Frenet :

($\vec{F_{mag}}$ selon $\vec N$ car $\perp \vec v$)

En projection selon $\vec N$:

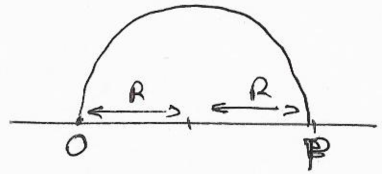


$$\frac{m v_0^2}{R} = q v_0 B$$

(R rayon du cercle, $\|\vec v\| = v_0$, comme $\vec v \perp \vec B$, $\vec v \wedge \vec B = v_0 B \vec N$)

$\Rightarrow \boxed{R = \frac{m v_0}{qB}}$ soit $R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}}$

4)



$$OP = 2R = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$$

• cas H^+ : $\boxed{OP_{H^+} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2m_p U}{e}}}$

AN : $OP_{H^+} = \frac{2}{0{,}2}\sqrt{\frac{2\times \cancel{1{,}6}\,10^{-27}\times 10^4}{\cancel{1{,}6}\,10^{-19}}} = 10\sqrt{2\,10^{-4}}$

$\boxed{OP_{H^+}} \simeq 10\times 10^{-2}\times\sqrt{2} \simeq 1{,}7\,10^{-1}\,m \simeq 17\ cm$

• Cas D^+ : $OP_{D^+} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{4m_p U}{e}} = \sqrt{2}\, OP_{H^+}$

$\xRightarrow{AN} \boxed{OP_{D^+} \simeq 20\ cm}$

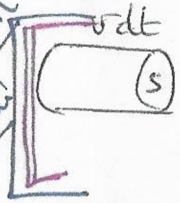
TD particules chargées

1 1) PFD sur 1 e^-, dans R_{TSG} : $m\dot{\vec{v}} = -e\vec{E} - \alpha_f \vec{v}$ (1) En régime permanent, $\dot{\vec{v}} = \vec{0}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{v_\infty} = -\dfrac{e\vec{E}}{\alpha_f}}$

2) (1) : eq diff 1er ordre, de solution $\vec{v} = \underbrace{\vec{A}e^{-\frac{\alpha_f}{m}t}}_{\text{sol gale eq SSM}} + \underbrace{\vec{v_\infty}}_{\text{sol part eq cplète}}$

à $t=0$, $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v_\infty}(1-e^{-t/\tau})}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{m}{\alpha_f}}$

3) savoir refaire



les e^- traversant S pendant dt sont ceux compris dans le cylindre de longueur $v\,dt$, volume $Sv_\infty dt$, il y en a $Sv_\infty dt\rho$

Pendant dt passe la charge $dq = Sv_\infty dt\rho e$

$\Rightarrow \boxed{I \overset{\text{def}}{=} \dfrac{dq}{dt} = Sv_\infty \rho e}$

4) Cours $\Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \dfrac{\Delta V}{L}\vec{e_x} = \dfrac{U}{L}\vec{e_x}$

Donc $I = \dfrac{\rho e^2 S E}{\alpha_f} = \dfrac{\rho e^2 S}{\alpha_f L} U \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{\alpha_f}{\rho e^2}\dfrac{L}{S}}$

q-1)

5) On a $r = \dfrac{RS}{L} = \dfrac{\alpha_f}{\rho e^2} \Rightarrow \boxed{\tau = \dfrac{m}{\alpha_f} = \dfrac{m}{r\rho e^2}} \overset{AN}{=} 2{,}5\,10^{-14}\,s$

au bout de 5τ, v_∞ est atteinte $\Rightarrow \simeq$ au bout de 50τ, les e^- sont $\simeq$ en permanence à v_{lim}

$\Rightarrow \boxed{f \simeq \dfrac{1}{50\tau} \simeq 8\,10^{11}\,Hz}$

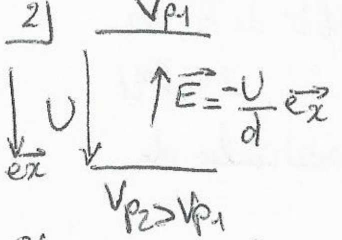
2 Deflection dans un tube cathodique

savoir refaire

1) Seule force = force électrique conservative $\Rightarrow$

$E_m = \text{cste} = \underbrace{0}_{\text{ini}} = \underbrace{-eV_0 + \frac{1}{2}mv_0^2}_{\text{final (en O)}} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2eV_0}{m}}}$

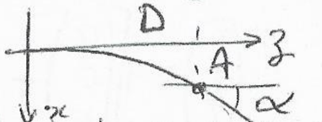
2)



$\Rightarrow \boxed{\vec{F_{el}} = \dfrac{eU}{d}\vec{e_x}}$

3) PFD sur l'e^- ds R_{TSG} : $m\begin{vmatrix}\dot{v_x} = eU/d \\ \dot{v_z} = 0\end{vmatrix} \underset{+CI}{\overset{\text{int}}{\Rightarrow}} \begin{vmatrix} v_x = \frac{eU}{md}t \\ v_z = v_0\end{vmatrix}$

$\underset{+CI}{\overset{\text{int}}{\Rightarrow}} \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{eU}{2md}t^2 \\ z &= v_0 t\end{aligned}}$



4) α est la pente de la tgte à la courbe en A, pt de sortie du champ : $\vec{v_A} = \begin{vmatrix}\frac{eUt_A}{md} \\ v_0\end{vmatrix}$, avec $t_A = \dfrac{D}{v_0}$

$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \dfrac{v_{xA}}{v_{zA}} = \dfrac{eUD}{mdv_0^2}}$

$\boxed{3}$ Proton dans un champ magnétique

1) Comme $\vec{B}$ selon $\vec{k}$, la force magnétique est toujours $\perp \vec{k}$ $\Rightarrow$ il n'y a jamais de force selon z.

⚠ Dire : "à $t=0$, $F_z = 0$" ne suffit pas : on ne prouve pas que $F_z = 0$, $\forall t$!

Donc le PFD appliqué à M en proj sur Oz donne
$m a_z = 0 \xRightarrow{\text{int}} v_z = \text{cste} = 0$ d'après les CI

2)

Dans le repère de Frenet,
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N} + \underbrace{\cancel{\frac{dv}{dt}}}_{0 \text{ car } v = \text{cste}}\vec{T}$$

Le PFD donne en proj sur $\vec{N}$: $|F_{mag}| = m\frac{v^2}{R}$

Soit comme $\|\vec{F_{mag}}\| = qvB$ ($\vec{v}$ toujours $\perp \vec{B}$)

d'où $R = \frac{mv}{eB} = \text{cste}$: la trajectoire est circulaire de rayon $R = \frac{mv}{eB}$.

La position du centre du cercle est donnée par 1 dessin à $t=0$ de la force magnétique :

3) PFD appliqué au proton dans RTSG :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}qB\dot{y}\\ -qB\dot{x}\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow (1)\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x}\end{cases}$$

On pose $z = x + iy$
$\Rightarrow -i\dot{z} = -i\dot{x} + \dot{y}$ donc $(1) \Leftrightarrow m\ddot{z} = qB(-i\dot{z})$

$\Leftrightarrow$ $\ddot{z} + i\omega\dot{z} = 0$ avec $\omega = \frac{qB}{m}$ eq diff 1er ordre

$\xrightarrow[\text{CI : } \dot{z}_0 = v_0]{\text{integ}}$ $\dot{z} = v_0 e^{-i\omega t}$ $\xrightarrow{\text{integ}}$ $z = \frac{v_0}{-i\omega}e^{-i\omega t} + A$

à $t=0$, $z = \frac{v_0}{-i\omega} + A \overset{CI}{=} 0 \Rightarrow A = -\frac{iv_0}{\omega}$ $\Rightarrow \boxed{z = \frac{iv_0}{\omega}\left(e^{i\omega t} - 1\right)}$

or $e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$, on retrouve x et y en prenant
$$\begin{cases} x = \mathrm{Re}(z) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ y = \mathrm{Im}(z) = \frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t - 1)\end{cases}$$

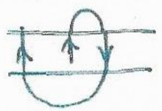
pas indispensable ... pour les meilleurs
dur et passé de mode

4) On a alors $x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$: cercle de centre $\left(0, -\frac{v_0}{\omega}\right)$, de rayon $R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB}$

[4] Principe du cyclotron

1) $\omega_0 \underset{\text{cours}}{=} \frac{qB}{m} \simeq 10^8 \text{ rad s}^{-1}$

2) $\vec{B}$ $\odot$



a) A chaque demi tour du proton, le champ $\vec{E}$ doit faire demi tour, pour pouvoir être toujours moteur

$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0}$

b) cours, $r = \frac{mv_0}{eB}$, or $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\cancel{e}rB}{m}\right)^2$

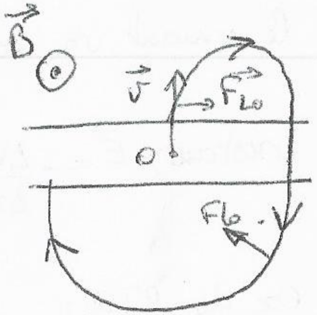
$\Rightarrow E_{max} = \frac{r^2e^2B^2}{2m} \underset{AN}{=} 1{,}9\,10^{-12}\,J$

alors $\boxed{v = \sqrt{\frac{2E_{max}}{m}}} = 4{,}8\,10^7\,m\,s^{-1} \left(\simeq \frac{c}{10}\right)$

c) $\boxed{\Delta E_c = eV_0}$ (cf exo [2]) $\Rightarrow$ $V_0 = 1{,}2\,10^7\,V$. (énorme)

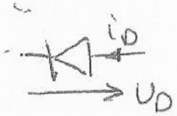
d) A chaque tour, le gain en energie vaut $2eV_m$ (2 demi tours) $\Rightarrow$ $\boxed{n_{max} = \frac{E_m}{2eV_m}} = \underline{603 \text{ tours}}$

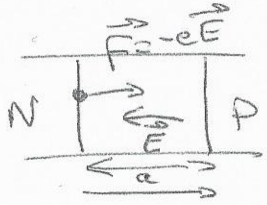
Allure trajectoire



Diode

1)





$U_D > 0 = V_P - V_N$

$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

($\vec{E}$ "descend les potentiels")

Si les e^- vont vers la droite, le courant va vers la gauche, $i_D > 0$

2) $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$, comme $\vec{E}$ vecteur constant, $\vec{E} = -\frac{\Delta V}{\Delta x}\vec{u_x}$

soit $\vec{E} = -\frac{U_D}{a}\vec{u_x}$

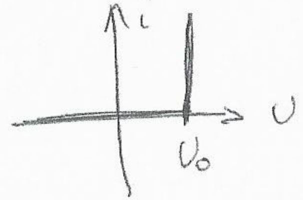
3) PFD pour $1\,e^-$, en proj selon Ox ds RTSG:

$$m\dot{v} = \frac{eU_D}{a} - F_0 - \alpha v$$

$$\Leftrightarrow \dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{\tau}{m}\left(\frac{eU_D}{a} - F_0\right) \qquad \text{avec } \tau = \frac{m}{\alpha} = 9\,10^{-11}\,s$$

$$\xrightarrow[CI]{Int} v = \frac{\tau}{m}\left(\frac{eU_D}{a} - F_0\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Vu la valeur de τ, la vitesse limite est atteinte très vite, l'electron peut traverser si $v > 0$, donc si $\frac{eU_D}{a} - F_0 > 0 \Leftrightarrow U_0 = \frac{F_0 a}{e} \simeq 0{,}6\,V$



Selection en vitesse I

1) si $\vec{v}$ inchangé $= \vec{v_0}$, d'après le PFD, $q(\vec{v_0} \wedge \vec{B} + \vec{E}) = 0$
$\Rightarrow$ il faut $\vec{E} = -\vec{v_0} \wedge \vec{B}$

2) Si la vitesse n'est pas égale en norme à $\vec{v_0}$, alors $\vec{E}$ ne compense plus parfaitement les effets de $\vec{B}$, la particule ne va pas en ligne droite. $\Rightarrow$ il suffit de faire ~~1~~ trou pour selectionner les particules de bonne vitesse.

Rayonnement classique de l'e^-

1)
2)) cours

3) $P = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} a^2$. On sait que $\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ est en N $= kg\,m\,s^{-2}$

$\Rightarrow [P] = \left[\dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0} \dfrac{t^3}{d^3}\right] \times \left[\dfrac{d^2}{t^4}\right] = \underbrace{\left(\dfrac{e}{6\pi\varepsilon_0 d^2}\right)}_{[F]} \underbrace{\dfrac{d}{t}}_{[v]}$

$[F]\,[v] = $ Watt

4) $E_m \searrow$, or $E_m = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v \searrow \Rightarrow R = \dfrac{m v_0}{eB} \searrow$.

5) Theoreme Puissance cinetique appliqué à l'e^- :

$\dfrac{dE_c}{dt} = -P(t) = -k a^2$ (on a posé $k = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c}$)

$\Leftrightarrow m v \dot{v} = -k(\dot{v})^2 \Leftrightarrow m v = -k\dot{v} \Rightarrow \dot{v} + \dfrac{m}{k} v = 0$

Donc $v = v_0\, e^{-kt/m}$ et donc $\boxed{E_c = E_{c_0}\, e^{-2kt/m}}$