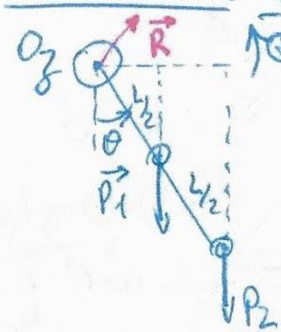
# TD TRC

## Pendule lesté




1) → Commencer par 1 dessin propre, avec les forces et bras de leviers.

→ Ne pas oublier $\vec{R}$ dans le bilan !

$$\sigma_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2} = \left[m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m L^2\right]\dot{\theta}$$

$\mathcal{M}_z(\vec{R}) = 0$ (liaison pivot parfaite)

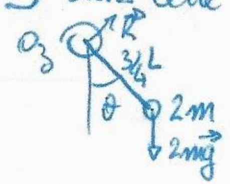
$\mathcal{M}_z(P_1) = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$

$\mathcal{M}_z(P_2) = -mgL\sin\theta$

Le TMC/$z$ donne : $\frac{5}{4}mL^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}mgL\sin\theta \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0}$

2) Définition : $\vec{OG} = \frac{m\vec{OM_1} + m\vec{OM_2}}{2m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{OM_2}}{2} + \vec{OM_2}\right) = \frac{3}{4}\vec{OM_2}$

3) Dans cette hypothèse, le même raisonnement donne :



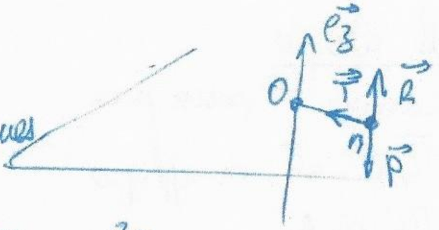

$$2m\left(\frac{3}{4}L\right)^2\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}2mgL\sin\theta$$

$$\iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4g}{3L}\sin\theta = 0}$$

pas la même équation ⇒ Un solide en rotation ne se comporte pas comme son centre d'inertie ! (ce qui serait vrai en translation ...)

⇒ A bien assimiler pour le chapitre qui suivra (solide en rotation)

## Masse + ficelle




1) Coordonnées cylindriques

- $OM = l_0 - v_0 t = r(t)$
- $\vec{\sigma_O} = mr^2\dot{\theta}\vec{e_z} = m(l_0 - v_0 t)^2\dot{\theta}\vec{e_z}$

2) On a $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}) = \underbrace{\vec{OM}\wedge\vec{T}}_{0 \text{ car colinéaires}} + \vec{OM}\wedge\underbrace{(\vec{P}+\vec{R})}_{0 \text{ car mvt plan} \Rightarrow \vec{P} \text{ et } \vec{R} \text{ se compensent}} = \vec{0}$

donc $\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt} = \vec{0}$

Alors $m(l_0 - v_0 t)^2\omega = \text{cste} = m l_0^2\omega_0$ (évaluée à $t=0$)

$\Rightarrow \omega = \frac{l_0^2\omega_0}{(l_0 - v_0 t)^2}$ ($\omega(t)\nearrow$)

3) PFD en polaires pour M : $m\underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix}}_{\text{cours} \to \text{exo}} = m\begin{pmatrix} -r\omega^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$

(1) $\Rightarrow \boxed{T_r = -mr\omega^2 = -m\frac{(l_0^2\omega_0)^2}{(l_0 - v_0 t)^3}}$

4) Par déf, $\delta W(\vec{T}) = \vec{T}\cdot\vec{dl} = T_r\,dr = -\frac{m(l_0^2\omega_0)^2}{r^3}dr$ (car $l_0 - v_0 t = r$)

Donc $\boxed{W(\vec{T}) = \int_{r=l_0}^{r=r} -\frac{m(l_0^2\omega_0)^2}{r^3}dr} = \left[+\frac{m(l_0^2\omega_0)^2}{2r^2}\right]_{l_0}^{r} = \frac{m(l_0^2\omega_0)^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{l_0^2}\right]$

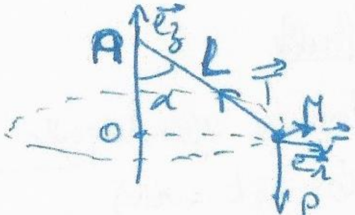
5) On applique le TEc entre $r = l_0$ et $r$, seule $\vec{T}$ travaille :

$\Delta E_c = E_c(r) - E_c(r_0) = W(\vec{T}) = \left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2)\right]_{r_0}^{r}$

or $\dot{r}(r_0) = \dot{r}(r) = v_0$ (énoncé) $\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left[(r\omega)^2 - (l_0\omega_0)^2\right]$

comme $\omega = \frac{l_0^2\omega_0}{r^2}$, $\Delta E_c = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{l_0^2\omega_0}{r}\right)^2 - (l_0\omega_0)^2\right] = \frac{m(l_0^2\omega_0)^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{l_0^2}\right]$

## Pendule cônique




1) Comme $\vec T$ passe par A, $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec T) = \vec 0$, on applique le TMC en A.

2) • $\vec\sigma_A = \vec{AM}\wedge m\vec v = (-l\cos\alpha\,\vec{e_z} + l\sin\alpha\,\vec{e_r})\wedge(l\sin\alpha\,\omega\,\vec{e_\theta})$

$= l^2 m\omega\sin\alpha(\cos\alpha\,\vec{e_r} + \sin\alpha\,\vec{e_z})$

• $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec P) = \vec{AM}\wedge\vec P = mgl\sin\alpha\,\vec{e_\theta}$ (bras de levier ...)

Comme $\omega = \text{cste}$, $\frac{d\vec\sigma_A}{dt} = ml^2\omega\sin\alpha\cos\alpha\,\underbrace{\frac{d\vec{e_r}}{dt}}_{\omega\vec{e_\theta}}$

Le TMC en A donne donc

$$mgl\sin\alpha = ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}}$$

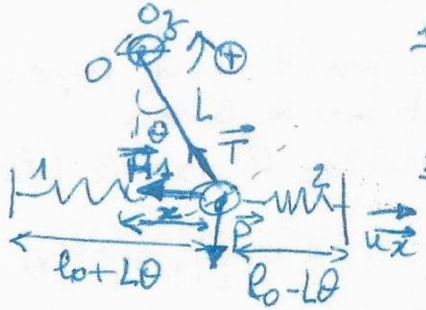
Rques : ① Bien que $\omega$ soit constant, $\vec\sigma_A$ n'est pas constant ! C'est 1 vecteur de norme constante qui tourne autour de Oz.
(Par contre $\vec\sigma_O$ serait lui constant)

② On utilise le TMC vectoriel ici bien qu'on ait 1 mvt plan, car sinon tout serait nul :

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = 0, \quad \mathcal{M}_z(\vec P) = 0, \quad \mathcal{M}_z(\vec T) = 0 \ldots$$

et on serait bloqué

## Pendule simple à 2 ressorts




1) $\theta$ petit $\Rightarrow x \simeq L\sin\theta \simeq L\theta$
$\Rightarrow v \simeq L\dot\theta$

2) TMC/Oz : $\sigma_z = mL^2\dot\theta$

$\mathcal{M}_z(\vec T) = 0$ $\quad \mathcal{M}_z(\vec P) = -mgL\sin\theta \simeq -mgL\theta$

$\mathcal{M}_z(\vec{R_{1/2}}) = -R_{1/2}L\cos\theta$ (bras levier) $\simeq -R_{1/2}L$.

Fait tourner dans sens ⊖

---

avec $\vec{R_1} = -kx\,\vec{u_x} = -kL\theta\,\vec{u_x}$ (allongé)

$\vec{R_2} = -(-kx)(-\vec{u_x}) = -kL\theta\,\vec{u_x}$ (comprimé)

Le TMC donne :

$$mL^2\ddot\theta = -mgL\theta - 2kL^2\theta$$

$$\Rightarrow \ddot\theta + \theta\underbrace{\left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)}_{\omega_0^2} = 0, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}}$$

3) En prenant l'origine des Ep pesanteur en O,

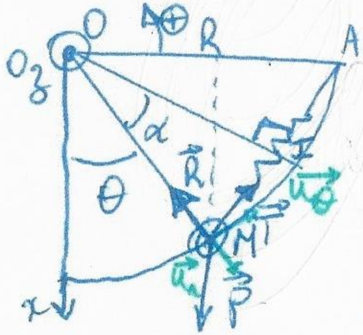
$$E_p = 2\times\underbrace{\frac12 kx^2}_{\text{ressorts}}\underbrace{-\,mgL\cos\theta}_{\text{pesanteur}} \underset{\theta\text{ petit}}{\simeq} kL^2\theta^2 - mgL\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)$$

Système conservatif ($\vec T$ ne W pas car ⊥ déplacement), donc $\frac{d}{dt}(E_p+E_c) = 0$ $\quad \left(E_c = \frac12 m(L\dot\theta)^2\right)$

$$\Leftrightarrow mL^2\ddot\theta\dot\theta + 2kL^2\theta\dot\theta + mgL\theta\dot\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot\theta + \theta\left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{L}\right) = 0$$

# 3. Méthodes pour 1 mouvement




1) OIA rectangle en I, donc

$AM = 2\,IA = 2R\sin\alpha = \Delta l_{ressort}$

$\Rightarrow T = 2kR\sin\alpha$

2) a) TMC/$O_z$ : $\sigma_z = mR^2\dot\theta$

$- \mathcal{M}_z(\vec R) = 0$

$- \mathcal{M}_z(\vec P) = -mgR\sin\theta$ (bras levier)

$- \mathcal{M}_z(\vec T) = +T.\,OI$ (bras de levier)

$= T.\,R\cos\alpha = 2kR^2\sin\alpha\cos\alpha$

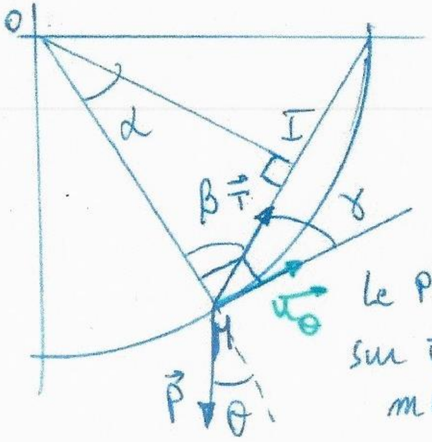
énoncé $kR^2\sin 2\alpha = kR^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = kR^2\cos\theta$

Le TMC/$O_z$ donne donc

$$mR^2\ddot\theta = -mgR\sin\theta + kR^2\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{k}{m}\cos\theta = 0}$$

b)




Triangle OIM :

$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Donc $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$

Le PFD donne donc en projection sur $\vec{u_\theta}$ :

$$mR\ddot\theta = -mg\sin\theta + \underbrace{\vec T \cdot \vec{u_\theta}}_{T\cos\alpha}$$

soit $mR\ddot\theta = -mg\sin\theta + \underbrace{2kR\sin\alpha\cos\alpha}_{kR\cos\theta}$ ($\hat{m}$ eq que au a))

c) Le mouvement est conservatif, car $\vec R$ ne W pas, et $\vec T$ et $\vec P$ dérivent d'1 Epotentielle.

Avec 1 origine en O pour Epp :

$$E_m = cste = \underbrace{\frac{1}{2}m(R\dot\theta)^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2}k(2R\sin\alpha)^2}_{E_{pressort}} - mg\overbrace{R\cos\theta}^{x_M}$$

$\to E_{pp} \downarrow$ si $x \nearrow$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow mR^2\dot\theta\ddot\theta - 2kR^2\dot\alpha \times 2\sin\alpha\cos\alpha - mgR\dot\theta\sin\theta = 0$

(on peut aussi remplacer $\alpha$ avant de dériver..)

or $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \Rightarrow \dot\alpha = -\frac{\dot\theta}{2}$, d'où :

$$mR^2\dot\theta\ddot\theta = -mgR\dot\theta\sin\theta + \underbrace{2kR^2\dot\theta\sin\alpha\cos\alpha}_{kR\cos\theta\,\dot\theta}$$

($\hat{m}$ équation que a))

3) Equilibre si $\frac{g}{R}\sin\theta = \frac{k}{m}\cos\theta \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{kR}{mg} > 0}$

solutions : $\begin{cases}\theta_1 = \mathrm{Atan}\left(\frac{kR}{mg}\right) & (\in [0, \pi/2]) \\ \theta_2 = \theta_1 + \pi & (\in [-\pi, -\frac{\pi}{2}])\end{cases}$

dérivée fonction composée

• Stabilité : on étudie $\frac{d^2E_m}{d\theta^2}$

$\frac{d\alpha}{d\theta}\frac{d(\sin^2\alpha)}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\times 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{dE_m}{d\theta} = mgR\sin\theta + 2kR^2\frac{d\sin^2\alpha}{d\theta}$

$= mgR\sin\theta - 2kR^2\sin\alpha\cos\alpha = mgR\sin\theta - kR^2\cos\theta$

(on peut aussi remplacer $\alpha$ avant de dériver) (+ simple ?)

$\Rightarrow \frac{d^2E_m}{d\theta^2} = mgR\cos\theta + kR^2\sin\theta$

on a $\frac{d^2E_m}{d\theta}(\theta_1) > 0 \Rightarrow$ eq stable

$\frac{d^2E_m}{d\theta}(\theta_2) < 0 \Rightarrow$ eq instable