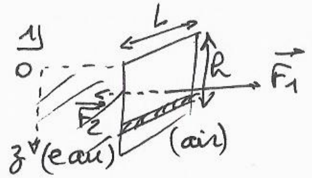
Statique des fluides

EC1



1) On a $P(z) = P_0 + \rho g z$ dans l'eau

Force elementaire sur une tranche $[z, z+dz]$: $dF_1 = p(z)\, \underbrace{dz \times L}_{dS}$.

$$dF_1 = (P_0 + \rho g z)\, dz\, L$$

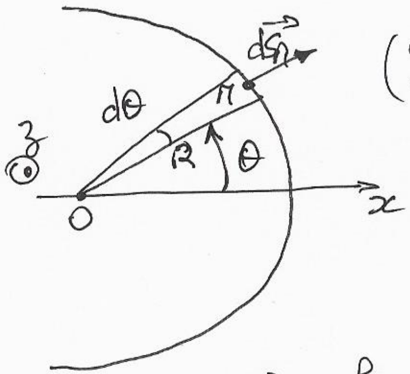
Donc $F_1 = \int_0^h dF_1 = P_0 h L + \frac{\rho g h^2}{2} L$

2) $P_{air} = P_0 \Rightarrow F_2 = P_0 S_{tot} = P_0 h L$

3) $F = \frac{\rho g h^2}{2} L$.

EC2

1) polaires, origine en O sur l'axe du cylindre



(vue de dessus)

2) $P_{eau} = P_0 + \rho g z$

$P_{air} = P_0$.

3) $\vec{dS_\Omega} = R\, d\theta\, dz\, \vec{u_r}$

4) $\vec{dF_p} = (P_{eau} - P_{air})\, dS_M\, \vec{u_r}$

$= \rho g z\, R\, d\theta\, dz\, \vec{u_r}$.

5) $\vec{F_p} = \int_{z=0}^{h} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \rho g z R\, d\theta\, dz\, \vec{u_r}$

6) Plan (Oxz) = plan de symetrie $\Rightarrow \vec{F_p}$ selon Ox

7) $dF_{px} = dF_p \cos\theta = \rho g z R \cos\theta\, d\theta\, dz$.

$$F_{px} = \int_{z=0}^{h} \rho g z\, dz \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} R \cos\theta\, d\theta = \left[\rho g \frac{z^2}{2}\right]_0^h \left[R \sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\rho g h^2}{2} R \times 2 = \rho g h^2 R$$

Rque : $\hat{m}$ force que sur 1 vitre plane de $\hat{m}$ surface transversale

EC3

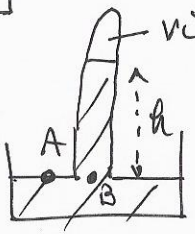
1) $\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \Rightarrow P = P_0 + \rho g z$ (z vers le bas)

2) tous les 10 m, on gagne $10 \rho g = 10 \times 10^3 \times 10$

$= 10^5\, Pa = \underline{1\ bar}$

3) $P_{fond} = \underbrace{1}_{P_0} + \frac{10000}{10} \simeq 1000$ bar

EC4



2) $P_A = P_0$

$P_B = 0 + \rho_{Hg}\, g\, h$

or $P_A = P_B$ ($\hat{m}$ altitude ds $\hat{m}$ liquide)

$\Rightarrow \boxed{P_0 = \rho_{Hg}\, g\, h}$

3) $\Delta P = \rho_{Hg}\, g\, \Delta h = 13\,500 \times 10 \times 0{,}09$

$= 12\,000$ Pa

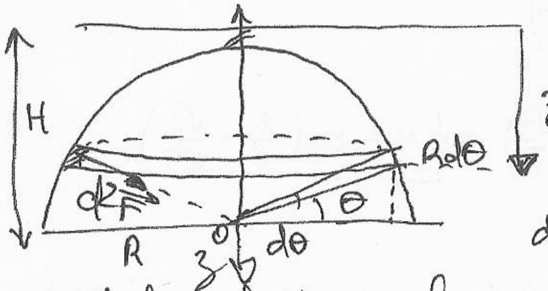
Corrigé TD Statique des Fluides

Fonte d'un glaçon

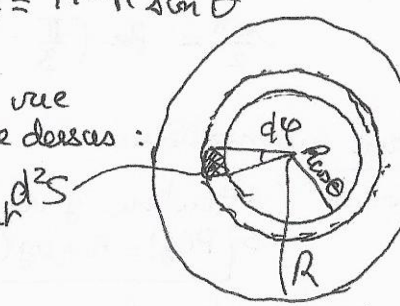
Le fond du verre "supporte" la masse de la colonne d'air et d'eau au dessus d'elle, indépendante de l'état physique de l'eau $\Rightarrow P_{A\,\text{avant}} = P_{A\,\text{après}} \Leftrightarrow P_0+\rho g h = P_0+\rho g h'$

$\Rightarrow \boxed{h=h'}$, pas besoin de vider le verre.

Hotel sous marin



vue de dessus :



1) L'élément de surface vaut

$$d^2S = R\cos\theta\, d\varphi \times R\,d\theta$$

Il subit $d^2\vec F$, orientée vers le centre de la sphère.

Par symétrie, la force résultante est selon Oz.

$$d^2F_z = d^2F\sin\theta = P(z)\, R^2\cos\theta\, d\theta\, d\varphi \sin\theta$$

avec $P(z) = P_0+\rho g z = P_0+\rho g(H-R\sin\theta)$

Il faut intégrer → θ varie entre 0 et $\pi/2$
→ φ " " 0 et 2π

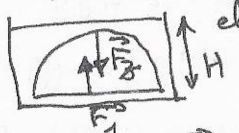
Finalement :

$$F_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2}\left[P_0+\rho g(H-R\sin\theta)\right]R^2\cos\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi R^2\left[(P_0+\rho g H)\underbrace{\left[\frac12\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}}_{1/2} - \rho R g\underbrace{\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}}_{1/3}\right]$$

$$\boxed{F_z = \pi R^2\left[P_0+\rho g\left(H-\frac23 R\right)\right]}$$

2) Supposons qu'on décolle un peu l'hémisphère pour la pensée :



elle subit − $\vec F_z$ cherchée
− $\vec F_1$ force de pression sous l'hémisphère

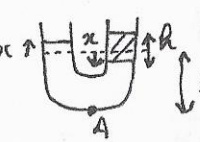
Or $\vec F_1 + \vec F_z = \vec \Pi$ (poussée d'Archimède)
$=$ résultante des forces de pression.
$= -\rho V\vec g$

avec $V = \frac23\pi R^3$ volume de l'hémisphère.

Donc $F_z = F_1 - \rho V g = \underbrace{\pi R^2(P_0+\rho g H)}_{F_1} - \frac23\pi R^3 g$

$= \pi R^2\left[P_0+\rho g\left(H-\frac23 R\right)\right]$ (ouf !)

Tube en U



$$P_A = \underbrace{P_0+\rho_e g(H+x)}_{\text{à gauche}} = \underbrace{P_0+\rho_e g(H-x)+\rho_h g h}_{\text{à droite}}.$$

(on a $h = \frac{V_h}{S} = 2$ cm) (Si l'eau baisse de x à droite, elle monte de x à gauche (V_{eau} = cste !))

On en tire $\boxed{x = \frac{\rho_h}{\rho_e}\frac{h}{2} = 0{,}6 \text{ cm}}$

Pression sur l'Everest

1) $T(z) = T_0 - az$, avec $T_0 = 20°C$, $a = 6{,}78\;10^{-3}$ °C m^{-1}

2) On a $pV = nRT \Rightarrow \rho = \frac{Mn}{V} = \frac{PM}{RT}$. On remplace dans $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{PM g}{RT} \Rightarrow \int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = -\int_0^z\frac{Mg}{R(T_0-az)}dz$

$$\Rightarrow \ln\frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{aR}\ln\left(\frac{T_0-az}{T_0}\right) \Rightarrow \boxed{P = P_0\left(\frac{T_0-az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}}}$$

Iceberg

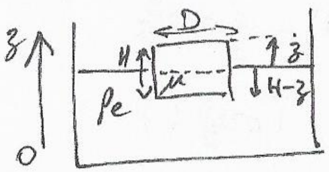
1) $\vec{\Pi} = (\rho_a V_e + \rho_e V_i) g \vec{z}$

$\vec{P} = -\rho_g (V_e + V_i) g \vec{z} = -\rho_g g V \vec{z}$

2) A l'équilibre $\Pi = P$ en norme : $\rho_a V_e + \rho_e (V - V_e) = \rho_g V$

d'où $\boxed{\dfrac{V_e}{V} = \dfrac{\rho_g - \rho_e}{\rho_a - \rho_g} \simeq 0,10}$, 90% de la glace est immergée

Oscillations d'un flotteur



1) $P = \Pi$ à l'équilibre, soit

$\mu \pi R^2 H g = \rho_e \pi R^2 g (H - z_{eq}) \Rightarrow \boxed{z_{eq} = H\left(1 - \dfrac{\mu}{\rho_e}\right)}$

2) PFD pour le flotteur selon Oz : $m\ddot{z} = \Pi - P$

$\mu \pi R^2 H \ddot{z} = \rho_e \pi R^2 (H - z) g - \mu \pi R^2 H g$

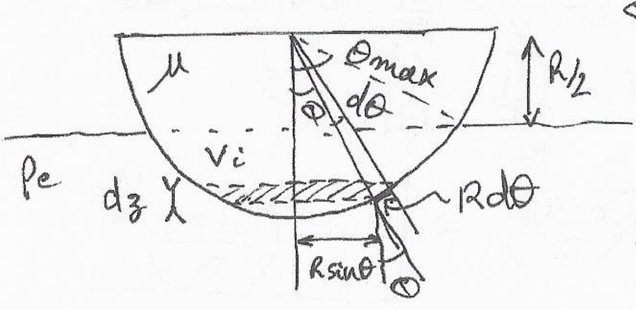
$\Leftrightarrow \ddot{z} + \underbrace{\dfrac{\rho_e}{\mu} \dfrac{g}{H}}_{\omega_0^2} z = \left(\dfrac{\rho_e}{\mu} - 1\right) g$

Osill harmonique de période $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\mu H}{\rho_e g}}$.

de Solutions $z = a \cos \omega_0 t + z_{eq}$

$\Rightarrow v = a\omega_0 \sin \omega_0 t \Rightarrow \boxed{v_{max} = a\omega_0}$

Equilibre d'1 flotteur

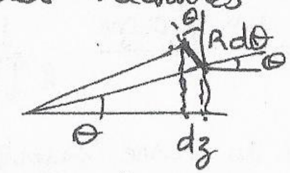


A l'equilibre, $P = \Pi$

$\Leftrightarrow \mu \dfrac{\pi R^2}{2} H g = \rho_e V_i g$

On doit donc calculer le volume immergé V_i par intégration

On somme les volumes élémentaires hachurés



$dV = 2R \sin\theta \, H \, dz$

or $dz = R d\theta \sin\theta$

Entre $\theta = 0$ et θ_{max} tel que $\cos\theta_{max} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \dfrac{\pi}{3}$

Soit $V_i = \displaystyle\int_0^{\pi/3} H \times 2R^2 \sin^2 d\theta$

$= \displaystyle\int_0^{\pi/3} H \times \cancel{2} R^2 \dfrac{(1 - \cos 2\theta)}{\cancel{2}} d\theta = HR^2 \left[\theta - \dfrac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}$

$= HR^2 \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

L'équilibre s'écrit donc

$\dfrac{\mu \pi}{2} = \rho_e \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{\mu = \rho_e \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)}$

Vidange automatique

1) Cours (Attention, y vers le haut, et on doit avoir $P(h) = P_0$)

$\Rightarrow \boxed{P(y) = P_0 + \mu g (h - y)}$

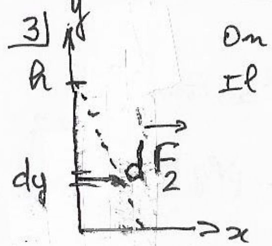
2) La pression est uniforme au fond $\begin{cases} \rightarrow P_{ext} = P_0 \\ \rightarrow P_{int} = P_0 + \mu g h \end{cases}$

le panneau inférieur subit $\boxed{\vec{F_1} = -(P_{int} - P_{ext}) \vec{e_y} \times S_{panneau} = -\mu g h b L \vec{e_y}}$

Comme cette force est uniformément répartie (comme son poids) elle s'applique au centre de la plaque, donc

$\boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F_1}) = F_1 L/2 = \dfrac{\mu g h b L^2}{2}}$

3)



On considère 1 tranche d'épaisseur dy, largeur b

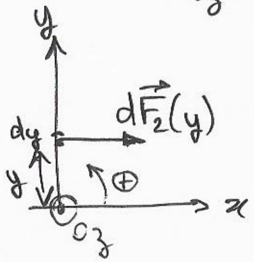
Il s'y applique $d\vec{F_2} = (P(y) - P_0) \, dy \, b \, \vec{e_x}$

$\Rightarrow \vec{F_2} = \displaystyle\int_{y=0}^{h} \mu g (h - y) b \, dy \, \vec{e_x} = \left[\mu g b h^2 - \mu g \dfrac{b h^2}{2}\right] \vec{e_x}$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{F_2} = \dfrac{\mu g b h^2}{2} \vec{e_x}}$

⚠ Comme $\vec{F_2}$ pas uniforme, elle ne s'applique pas au centre de la plaque (intuitivement, c'est plus bas...), on doit poser le calcul intégral :

$$d\Gamma_{Oz} = -dF_2(y) \times y$$



et donc $\Gamma_{Oz}(\vec{F_2}) = -\int_{y=0}^{h} dF_2(y)\, y = \int_0^h \mu g(h-y)\, b\, y\, dy$

$$\Rightarrow \Gamma_{Oz}(\vec{F_2}) = -\mu g b \left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$= -\mu g b \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Gamma_{Oz}(\vec{F_2}) = -\mu g b \frac{h^3}{6}}$$

4) La vidange a lieu si $\Gamma_{Oz}(\vec{F_2}) + \Gamma_{Oz}(\vec{F_1}) \leq 0$:

$$\mu g h b \frac{L^2}{2} \leq \mu g b \frac{h^3}{6} \Leftrightarrow h^2 \geq 3L^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h \geq \sqrt{3}L}$$