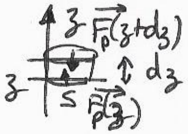
La Pression artérielle

A] 1] Relation fondamentale de la statique des fluides :

(1) $\boxed{\rho \vec g = \overrightarrow{\text{grad}}\, P}$ soit ici $\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$ (axe ascendant)

démo :



équilibre de la tranche de section S, épaisseur dz : $0 = m\vec g + \vec F_p(z+dz) + \vec F_p(z)$. En proj sur Oz ascendant :

$$-P(z+dz)S + P(z)S - mg = 0$$

or $m = \rho S dz$ soit $-\left(\frac{dP}{dz} dz\, S\right) - \rho S g dz = 0$ (3)

d'où $\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}$ (1)

2] (1) s'intègre en $\boxed{P(z) = P_{atm} - \rho_{Hg} g z}$ (1) (pour $z=0$, $P = P_B = P_0$; $\rho = \rho_{Hg}$)

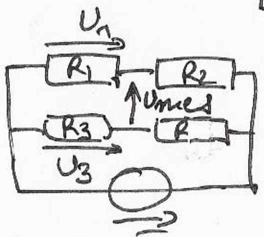
3] On a $P_A = \underset{(\text{vide})}{0} = P(h) = P_{atm} - \rho_{Hg} g h$

Donc $\boxed{h = \frac{P_{atm}}{\rho_{Hg}\, g}}$ (1)

AN : $h = \frac{1{,}013\,10^5}{13{,}6\,10^3 \times 9{,}8} = 76{,}0$ cm (1)

4] $\rho_{Hg} = 13{,}6 \times \rho_{eau}$ ⇒ il faut 1 colonne d'eau 13,6 fois plus grande : $\boxed{h_{eau} = 10{,}3 \text{ m}}$! (dur en pratique !) (1)

B]



5] DT : $\boxed{U_1 = E\frac{R_1}{R_1+R_2}}$ et $\boxed{U_3 = \frac{R_3}{R_3+R}E}$ (2)

6] loi des mailles : $U_1 = U_3 + U_{mes}$

⇒ $\boxed{U_{mes} = \left(\frac{R_1}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R}\right)E}$ (1)

7] Si $P = P_{atm}$, $R = R_0$, alors $U_{mes} = 0$ si $\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{R_3}{R_3+R_0}$

⇔ $R_1(R_3+R_0) - R_3(R_1+R_2) = 0$

⇔ $R_1R_0 = R_3R_2$ ⇔ $\boxed{R_1 = \frac{R_3R_2}{R_0}}$ (2)

8] a) Alors $R = R_0(1+k\Delta P)$
$= R_0 + \Delta R$, avec $\boxed{\Delta R = kR_0\Delta P}$ (1)

b) $\Delta R \ll R_0 \Leftrightarrow \boxed{k\Delta P \ll 1}$ (1)

c) Alors, on a $\frac{R_3}{R_3+R_0+\Delta R} = \frac{R_3}{(R_3+R_0)\left(1+\frac{\Delta R}{R_3+R_0}\right)} \overset{DL}{\simeq} \frac{R_3}{R_3+R_0}\left(1-\frac{\Delta R}{R_3+R_0}\right)$

D'autre part, $\frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{R_3R_2}{R_0\left(\frac{R_3R_2}{R_0}+R_2\right)} = \frac{R_3}{R_0+R_3}$

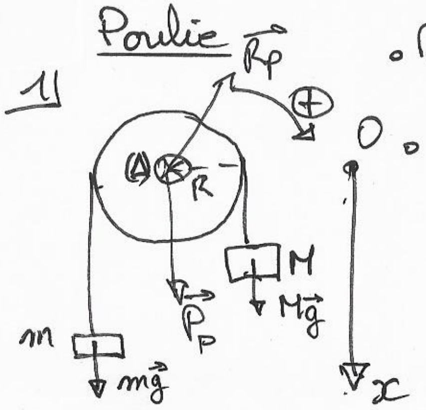
Donc $\boxed{U_{mes} \simeq \left[\frac{R_3}{R_0+R_3} - \frac{R_3}{R_3+R_0}\left(1-\frac{\Delta R}{R_3+R_0}\right)\right]E \simeq \frac{R_3\, k\Delta P R_0}{(R_3+R_0)^2}E}$

D'où $\boxed{S = \frac{U_{mes}}{\Delta P} = \frac{R_3R_0kE}{(R_3+R_0)^2}}$ (3)

avec $\boxed{[S] = [k][E] = V.Pa^{-1}}$ (1)

S donne la variation de tension observée pour 1 variation de pression de 1 Pa. (1)

1)



∘ Bilan des forces : - 3 poids
- la réaction d'axe

∘ $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_p}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{R_p}) = 0$

$\mathcal{M}_\Delta(m\vec{g}) = -Rmg$ 3

$\mathcal{M}_\Delta(Mg) = +\underbrace{3m}_{M}Rg$

2) TMC/Δ pour le système total :

$$\underset{mR^2+mR^2+3mR^2}{\overset{\parallel}{J_{tot}}}\,\dot{\omega} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_i}) = 2mRg$$ 2

$\Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \frac{2}{5}\frac{g}{R}}$

3) Fil inextensible $\Rightarrow v_M = R\omega \Rightarrow \boxed{a_M = R\dot{\omega} = \frac{2}{5}g}$ 1

4) • PFD pour M dans RTSG selon Ox :

$Ma_M = Mg - T_M \Rightarrow \boxed{T_M = 3m(g - \frac{2}{5}g) = \frac{9}{5}mg}$

• PFD pour m dans RTSG selon Ox : (fil inext $\Rightarrow \vec{a_m} = -\vec{a_M}$)

$-ma_M = mg - T_m \Rightarrow \boxed{T_m = m(g + \frac{2}{5}g) = \frac{7}{5}mg}$ 3

5) M a une accélération constante, donc par intégration avec les CI : $v_M = a_M t$; $x_M = \frac{1}{2}a_M t^2$ 1

M touche le sol $\Leftrightarrow x_M = h = \frac{1}{2}a_M t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a_M}}$ 1

d'où $\boxed{v_{sol} = \sqrt{2ha_M} = \sqrt{\frac{4}{5}gh}}$ 1

6) Alors $\boxed{\omega_{fin} = \frac{v_{sol}}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{5}gh}}$ 1

7) Au bout de N tours, le travail de $\vec{F}$ vaut

$W(\vec{F}) = -2N\pi RF$ (résistant) 1

La poulie est seule (fil coupé), on lui applique le TEc

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}J_p(\underset{\text{immobilité finale}}{0} - \omega_{fin}^2) = \underbrace{W(\vec{R_p})}_{0} + W(\vec{F})$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{1}{R^2}\frac{4}{5}gh\right) = 2N\pi RF$

$\Rightarrow \boxed{F = \frac{mgh}{5\pi NR}}$ 3

La voile solaire

1.1 1) $\vec v = \dot r\,\vec e_r + r\dot\theta\,\vec e_\theta$

$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\vec e_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta)\vec e_\theta$ (2)

2) $\vec F_S = -G\frac{\Omega_S m}{r^2}\vec e_r$ (1)

3) • Force centrale → conservative ⇒ $E_m = $ cste

• $\frac{d\vec L_O}{dt} = \vec{S\Omega}\wedge\vec F_S = 0 \Rightarrow \vec L_S = \vec{\text{cste}}$ (2)

4) PFD pour le corps dans le ref héliocentrique : $m\vec a = \vec F_S$. La traj est circulaire, donc en proj :

$m\begin{pmatrix}-r\dot\theta^2\\ r\ddot\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-G\Omega_S m/r^2\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$ (2)

(2) ⇒ $\ddot\theta = 0$, $\dot\theta = $ cste   (1) : $\dot\theta = \sqrt{\frac{G\Omega_S}{r^3}} \underset{\text{Circule}}{=} \frac{2\pi}{T}$

⇒ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\Omega_S}}}$ (HS)

5) PFD en proj sur $\vec e_r$: $\cancel{m}(\ddot r - r\dot\theta^2) = -G\frac{\Omega_S \cancel{m}}{r^2}$

⇔ $m\ddot r = mr\dot\theta^2 - \frac{G\Omega_S m}{r^2}$ (2)

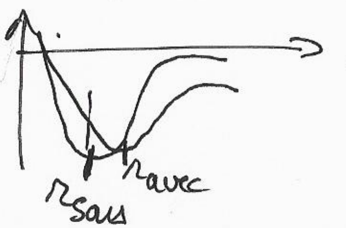
On a $\begin{cases} L = mr^2\dot\theta \Rightarrow \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{mr^2\dot\theta^2}{2} \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = mr\dot\theta^2 \\ -\frac{G\Omega_S m}{r^2} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{G\Omega_S m}{r}\right)\end{cases}$

D'où la relation demandée : $\boxed{m\ddot r = -E_p'(r)}$. (2)

6) E_A : cercle ($r = $ cste) E_C hyperbole (r non borné)

E_B : ellipse (r borné) (2)

1.2 7)



$r_{avec} > r_{sans}$ mais pas possible de sortir du puits de potentiel. (1)

8) Le TMC donne pour le satellite :

$\frac{d\vec L_S}{dt} = \vec{S\Omega}\wedge(\vec F_S + F_\theta\vec e_\theta) = rF_\theta\,\vec e_z$ (1)

9) Le PFD devient $\begin{cases} -mr\dot\theta^2 = -\frac{G\Omega_S m}{r^2} \Rightarrow \dot\theta = \sqrt{\frac{G\Omega_S}{r^3}}\ (1)\\ m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = F_\theta\ (2)\end{cases}$

(1) ⇒ $\ddot\theta = -\frac{3}{2}\frac{\dot r}{r}\sqrt{\frac{G\Omega_S}{r^3}}$ (2) devient : $2\dot r\sqrt{\frac{G\Omega_S}{r^3}} - \dot r\frac{3}{2}\sqrt{\frac{G\Omega_S}{r^3}} = \frac{F_\theta}{m}$

D'où $\dot r = \frac{2r^{3/2}}{\sqrt{G\Omega_S}}\frac{F_\theta}{m}$ ⇒ $\boxed{C = \frac{2}{\sqrt{G\Omega_S}}}$ (4)

10) $\phi(r) = \frac{A}{r^2} \Rightarrow \frac{\phi(r)}{\phi(r_T)} = \frac{A/r^2}{A/r_T^2} \Rightarrow \boxed{\phi(r) = \phi(r_T)\frac{r_T^2}{r^2}}$ (2)

11) On a $F_\theta(r) = \underbrace{\frac{2S}{c}\cos^2\alpha\sin\alpha}_{\text{cste}}\,\phi(r) \Rightarrow \frac{F_\theta(r)}{\phi(r)} = \frac{F_\theta(R_T)}{\phi(R_T)}$

Donc $F_\theta(r) = F_\theta(R_T)\frac{r_T^2}{r^2}$. On remplace dans $\frac{dr}{dt} = Cr^{3/2}\frac{F_\theta}{m}$

⇒ $\frac{dr}{dt} = C\frac{r^{3/2}}{r^2}\frac{F_\theta(r_T)r_T^2}{m} = \underbrace{Cr_T^2}_{C'}\underbrace{\frac{F_\theta(r_T)}{m}}_{a}\frac{1}{\sqrt r}$ (4) ⇒ $\boxed{C' = Cr_T^2}$

12) On a $\frac{dr}{dt} = \frac{K}{\sqrt r}$, avec $K = C'a$, donc d'après l'indication, l'intégration donne le tps de transit

$\boxed{t_{TM} = \frac{2}{3K}\left[r_M^{3/2} - r_T^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\frac{r_M^{3/2} - r_T^{3/2}}{C'a}}$ (2)

Positionnement de Telescopes Spatiaux

1) Trajectoire = ellipse dont la Terre est 1 des foyers (1)

2) Hyp : traj circulaire, PFD ds ref geocentrique, en polaires :

$$m\begin{pmatrix}-r\dot\theta^2\\ r\ddot\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{GM_Tm}{r^2}\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix} \quad (2)$$

$(2)\Rightarrow\ddot\theta=0$ (1) → mvt uniforme

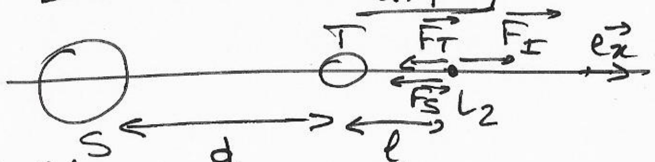
3) $(1)\Rightarrow r\dot\theta^2=\frac{v^2}{r}=\frac{GM_Tm}{r^2}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_T\cancel{m}}{r}}=\sqrt{\frac{GM_Tm}{R_T+h}}$ (2)

4) $T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi(R_T+h)}{v}$ (3) (1)

5) 3e LK : le cube des ½ gd axe est prop au carré de la période du satellite (1)

$(3)^2\Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{4\pi^2}=\frac{R_T+h}{v^2}=\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$ (1) (d'après q3)

6)



Le satellite est en equilibre en $L_2\Rightarrow\Sigma\vec F=\vec 0$, en proj sur $\vec{e_x}$:

$$-\frac{GM_S\cancel{m}}{(d+\ell)^2}-\frac{GM_T\cancel{m}}{\ell^2}+\cancel{m}\omega_T^2(d+\ell)=0 \quad (4) \quad (2)$$

7) On a $\omega_T^2\underset{\text{enoncé}}{=}\frac{GM_S}{d^3}\Rightarrow(4)\Leftrightarrow\frac{\cancel{G}M_S}{(d+\ell)^2}+\frac{\cancel{G}M_T}{\ell^2}=\frac{\cancel{G}M_S}{d^3}(d+\ell)$

$\overset{\times d^2}{\Rightarrow}$ $\boxed{M_S\frac{d^2}{(d+\ell)^2}+M_T\frac{d^2}{\ell^2}=M_S\frac{d+\ell}{d}}$ (5) (2)

8) (5) se réecrit $M_T\frac{d^2}{\ell^2}+M_S\underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{\ell}{d}}\right)^2}_{\overset{DL}{\approx}M_S\left(1-\frac{2\ell}{d}\right)}=M_S\left(1+\frac{\ell}{d}\right)$

Soit $M_T\frac{d^2}{\ell^2}=M_S\frac{3\ell}{d}\Rightarrow\boxed{\ell=\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}\,d}$ (3)

9) les 3 forces sont centrales, donc conservatives (1)

10) Forces gravitationnelles : $E_{p_S}=-\frac{GM_Sm}{d+\ell}$; $E_{p_T}=-\frac{GM_Tm}{\ell}$

Force d'inertie : $\vec F=m\omega_T^2(d+\ell)\vec{e_x}$

$$=-\frac{d}{d\ell}\left[\frac{m\omega^2}{2}(d+\ell)^2\right]\vec{e_x} \quad (3)$$

Soit $\boxed{E_{p_{Fie}}=-\frac12 m\omega^2(d+\ell)^2}$

11) On trace $E_p(\ell)$ → si extremum → mini : equi stable ; → max : equi instable (2)

12) Partant de la position L_2 d'equilibre :

↗ ℓ { diminue les 2 forces grav ; augmente la force d'inertie } ⇒ pas de rappel vers L_2 (2)

⇒ posit° instable

13) En L_2, ⊕ satellite toujours immobile / Terre

⊕ dans l'"ombre de la Terre", pas perturbé par le Soleil (2)

⊖ instable : doit être corrigé en permanence