DS Physique 3h

Consignes impératives

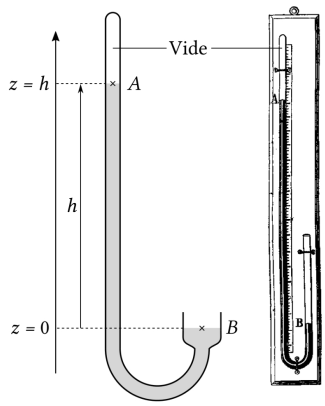
- Les réponses devront être justifiées.
- Les questions NON NUMÉROTÉES, dont les résultats ne sont pas HOMOGÈNES, les expressions littérales pas ENCADRÉES, les applications numériques pas SOULIGNÉES, NE SERONT PAS CORRIGÉES.

1 La pression artérielle.

A. À propos du millimètre de mercure.

En médecine, l'unité encore largement utilisée pour exprimer les pressions est le millimètre de mercure. On se propose d'établir le lien entre le mmHg et le bar : 760mmHg $= 1,013$ bar. Pour cela, on considère le baromètre à siphon représenté ci-après sur la figure ci-contre. Ce baromètre utilise du mercure liquide, fluide incompressible de masse volumique $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13,6 \times 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}. On note $P_{\mathrm{atm}} = 1,013$ bar la pression atmosphérique et $g = 9,81$ m $\cdot$ s^{-2} l'accélération de la pesanteur. Le point B est en contact avec l'atmosphère de sorte que $P_B = P_{\mathrm{atm}}$.

On néglige tout phénomène de tension superficielle. De plus, comme la pression de vapeur saturante du mercure est très faible devant la pression atmosphérique, on assimilera l'espace au dessus du point A à du vide ; en particulier on considérera que $P_A \simeq 0$ bar.



1. Rappeler puis établir la relation fondamentale de la statique des fluides dans un fluide de masse volumique ρ pour un axe z vertical ascendant.
Pour la démonstration, on postulera que la pression P ne dépend que de z, et on écrira l'équilibre d'une couche de fluide comprise entre z et $z + dz$.

2. Établir l'expression de $P(z)$ dans le mercure liquide.

3. Montrer que la hauteur h de liquide entre les points A et B s'exprime selon $h = \dfrac{P_{\mathrm{atm}}}{\rho_{\mathrm{Hg}} g}$.
Faire l'application numérique de h puis commenter le résultat.

4. Justifier l'utilisation du mercure plutôt que de l'eau liquide pour la réalisation d'un baromètre à siphon.

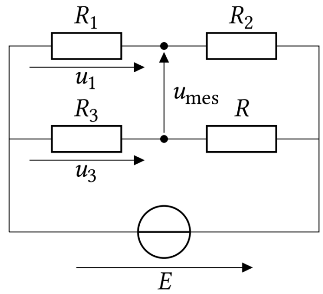
B. Mesure piézorésistive de pression artérielle.

Afin d'obtenir une mesure de la pression artérielle en continu, la réalisation d'un transducteur de pression est nécessaire. Un transducteur de pression convertit un signal de pression $P(t)$ en une tension électrique directement mesurable $u_{\mathrm{mes}}(t)$. Un transducteur de pression largement utilisé dans le domaine de la santé exploite le phénomène de piézorésistivité. La piézorésistivité traduit le fait que la résistance électrique de certains matériaux varie selon la pression à laquelle ils sont soumis. Cette dépendance n'est pas due aux variations des caractéristiques géométriques du matériau. Aucune connaissance sur la piézorésistivité n'est nécessaire pour traiter les questions de cette partie. On considère un matériau piézorésistif dont la résistance dépend de la pression sous la forme suivante :

$$R = R_0 \left[1 + k\left(P - P_{\mathrm{atm}}\right)\right]$$

$P_{\mathrm{atm}} = 1,013$ bar est la pression atmosphérique, k une constante appelée coefficient de piézorésistivité et R_0 est la valeur de la résistance pour $P = P_{\mathrm{atm}}$.

Le matériau piézorésistif est placé dans le circuit représenté sur la figure ci-contre. E est une tension continue constante. R_1 est une résistance variable. R_3 et R_4 sont des résistances constantes. u_{mes} est la tension mesurée.
On cherche à exprimer u_{mes} en fonction des données de l'énoncé.



5. Exprimer u_1 en fonction de R_1, R_2 et E, puis u_3 en fonction de R_3, R et E.

6. En déduire que $u_{\mathrm{mes}} = \left(\dfrac{R_1}{R_1 + R_2} - \dfrac{R_3}{R + R_3}\right) E$.

7. On veut ajuster la résistance R_1 afin d'avoir $u_{\mathrm{mes}} = 0$ lorsque $P = P_{\mathrm{atm}}$.
Déterminer l'expression de R_1 permettant d'avoir $u_{\mathrm{mes}} = 0$ lorsque $P = P_{\mathrm{atm}}$, en fonction de R_0, R_2 et R_3.

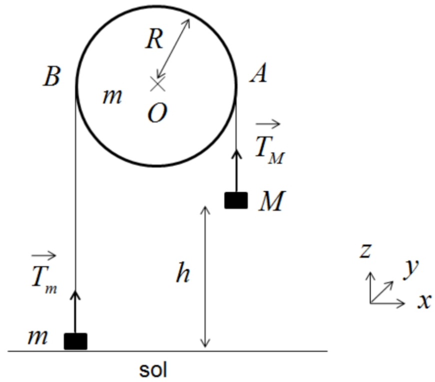
8. On considère une variation de pression ΔP positive par rapport à P_{atm} de sorte que : $P = P_{\mathrm{atm}} + \Delta P$.
a. Montrer que la résistance R peut s'écrire sous la forme $R = R_0 + \Delta R$. Exprimer ΔR en fonction de k, ΔP et R_0.
b. En pratique, pour les pressions artérielles usuelles, le coefficient de piézorésistivité k et la variation de pression ΔP sont tels que $\Delta R \ll R_0$ (ΔR très petit devant R_0). Proposer une condition reliant k et ΔP pour avoir $\Delta R \ll R_0$.
Cette condition est supposée remplie dans la suite.
c. Montrer que, si R_1 a pour expression celle déterminée question 7, à une variation de pression $\triangle P$ est associée une tension mesurée

$$u_{\mathrm{mes}} \simeq \frac{R_3}{\left(R_0 + R_3\right)^2} \times R_0 \times k\Delta P \times E$$

En déduire l'expression de la sensibilité du transducteur de pression $S = \dfrac{u_{\text{mes}}}{\Delta P}$ en fonction des données de l'énoncé. Précisé l'unité de S et donner le sens physique de cette grandeur.

$\boxed{2}$ Mise en rotation d'une poulie

Un fil de masse négligeable passe par la gorge d'une poulie de rayon R et de masse m. Ce fil frotte sans glisser sur la poulie. À chaque extrémité du fil sont attachées deux masses : une de masse m et l'autre de masse $M = 3m$.
On suppose que toute la masse m de la poulie se trouve sur sa circonférence, ce qui permet d'écrire son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oy) sous la forme $J_p = mR^2$.
La poulie peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal (Oy). Å l'instant initial, la masse M se trouve à une hauteur h au-dessus du sol, et la masse m est au niveau du sol, en le touchant à peine. L'ensemble est initialement immobile, et on le laisse évoluer librement.
On admet que le moment d'inertie du système { masse $m+$ masse $M+$ poulie + fil } par rapport à l'axe (Oy) vaut $J_{tot} = J_p + mR^2 + MR^2$.



1) Faire le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le système { masse $m+$ masse $M+$ poulie + fil }. Exprimer leur moment par rapport à l'axe (Oy) en fonction de R, M, m et g.
2) Appliquer le théorème du moment cinétique au système { masse $m+$ masse $M+$ poulie + fil } et en déduire l'expression de $\dot{\omega}$ (la dérivée de la vitesse angulaire de la poulie), en fonction de m, R et g.
3) Exprimer l'accélération de la masse M.
4) En déduire les tensions T_m et T_M, existant dans chaque brin de fil lors du mouvement en fonction de m et g.
5) Montrer que la vitesse v_{sol} de la masse M lorsqu'elle touche le sol vaut :

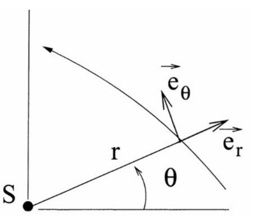
$$v_{\text{sol}} = \sqrt{\frac{4}{5}gh}$$

6) En déduire l'expression de la vitesse angulaire ω_{fin} de la poulie, lorsque M touche le sol.
A l'instant où la masse M touche le sol, on coupe le fil reliant les deux masses. On exerce alors au point A une force F permettant de freiner et arrêter la poulie.
7) Exprimer par un raisonnement énergétique la norme F de cette force pour que la poulie s'arrête après avoir fait N tours.

$\boxed{3}$ La voile solaire

A) Orbites héliocentriques

Le référentiel héliocentrique est considéré comme galiléen. Le mouvement des astres est décrit dans un repère polaire (r, θ) dont le Soleil occupe l'origine S. Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans le repère orthonormal associé $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ représenté sur la figure ci-contre. Le Soleil est assimilé à un corps parfaitement sphérique et son champ de gravité est donc un champ de force centrale newtonienne. Tous les mouvements orbitaux de ce problème sont plans.



On note la masse du Soleil M_S, la constante de gravitation $\mathcal{G}$, les distances moyennes Terre-Soleil r_T et Mars-Soleil r_M

1. Rappeler l'expression de la vitesse et de l'accélération d'un corps ponctuel dans un repère de coordonnées polaires.

2. Exprimer la force de gravitation $\vec{F_S}$ exercée par le Soleil sur un corps de masse m situé à une distance r du centre de l'astre.

3. Montrer que l'énergie et le moment cinétique sont conservés lorsque le corps est soumis à la seule force de gravitation $\vec{F_S}$.

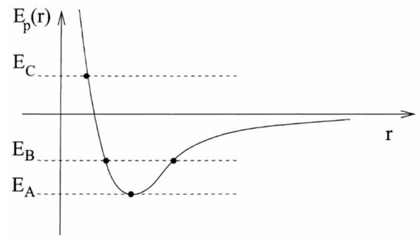
4. Appliquer le le principe fondamental de la dynamique à un corps soumis à la seule force de gravitation $\vec{F_S}$ en coordonnées cylindriques.

5. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la distance radiale $r(t)$. Vérifier que l'on peut la mettre sous la forme :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -E_p'(r(t))$$

où E_p' désigne la dérivée par rapport à r de l'énergie potentielle effective $E_p(r) = \dfrac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_s m}{r}$, $\mathcal{L}$ désignant le moment cinétique du corps par rapport au Soleil.

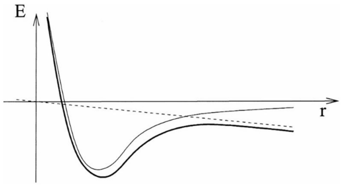
6. L'énergie potentielle effective $E_p(r)$ est représentée sur la figure ci-contre. Décrire qualitativement la nature des trajectoires suivis par des corps dont les énergies totales seraient respectivement E_A, E_B et E_C schématisées par des lignes horizontales sur la figure.



B) Effet d'une voile solaire

• Force radiale : vent arrière

On considère ici un corps équipé d'une voile solaire suivant une orbite héliocentrique circulaire $r(t) = r_0$. À un instant donné, on exerce sur le corps une force supplémentaire dûe à la pression de radiation du Soleil sur la voile solaire. Dans un premier temps, on modélise cette force $\vec{F} = F_r\overrightarrow{e_r}$ purement radiale, dirigée vers l'extérieur et d'intensité constante très faible. Le potentiel associé à cette force est représenté sur la figure cicontre par la courbe en pointillés. On cherche à déterminer la modification de trajectoire de cette force supplémentaire. L'énergie potentielle "radiale" totale, représentée en trait gras sur la figure ci-contre résulte de la somme du potentiel gravitationnel (en trait fin) et du potentiel associé à la pression de radiation du Soleil (en pointillés).



7. En s'appuyant sur le schéma ci-dessus, justifier qu'une force purement radiale de faible intensité n'est pas de nature à modifier de façon significative le rayon de l'orbite circulaire héliocentrique.

• Force orthoradiale : vent de travers

Une force purement radiale n'est pas suffisante pour modifier le déplacement du corps équipé d'une voile solaire. C'est pour cela que la voile ne sera pas orientée face au Soleil mais en biais afin d'engendrer une force orthoradiale de la forme $\vec{F} = F_\theta\overrightarrow{e_\theta}$ dirigée vers l'avant de la trajectoire et d'intensité constante très faible.

8. Exprimer la variation temporelle de moment cinétique du corps par rapport au Soleil en fonction de F_θ et du rayon $r(t)$ de la trajectoire du corps.

9. On néglige désormais le terme $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ dans le principe fondamental de la dynamique. On suppose aussi que l'orbite reste assimilable à une orbite circulaire (spirale lentement croissante). Montrer que le rayon $r(t)$ de l'orbite s'accroît avec le temps et obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) = C(r(t))^{3/2}\frac{F_\theta}{m}$$

où C est une constante que l'on déterminera.
Indication : Exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de r grâce à l'une des composante du PFD, puis exprimer $\ddot{\theta}$ et réinjecter ces expressions dans la seconde composante du PFD.
Dans le cas d'une voile solaire la force $\vec{F}$ provient de la pression de radiation et dépend donc de la distance à l'astre r à travers le flux d'énergie lumineuse $\Phi(r)$ exprimé en W.m^{-2}, qui en l'absence de toute absorption évolue en r^{-2}.

10. Justifier que le flux en r puisse s'écrire comme $\Phi(r) = \Phi(r_T) \times \frac{r_T^2}{r^2}$.

11. La force issue de la pression de radiation peut s'écrire $\vec{F}(r) = F_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{2\Phi(r)S}{c}\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)\overrightarrow{e_\theta}$ avec α l'angle entre la normale à la voile $\vec{n}$ et $\overrightarrow{e_r}$, et S la surface de la voile. Montrer que l'équation différentielle pour le rayon de l'orbite peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) = C'\frac{a}{\sqrt{r(t)}}$$

avec $a = \dfrac{F_\theta(r_T)}{m}$ et C' une constante à déterminer (m étant la masse du système).

12. Intégrer l'équation différentielle précédente et exprimer le temps de transit t_{TM} pour rallier Mars depuis la Terre à l'aide d'une voile solaire, en ne considérant que la force gravitationnelle exercée par le Soleil et la force de pression de radiation.
Indication : La solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{\sqrt{r}}$$

entre les instants 0 et t vérifie

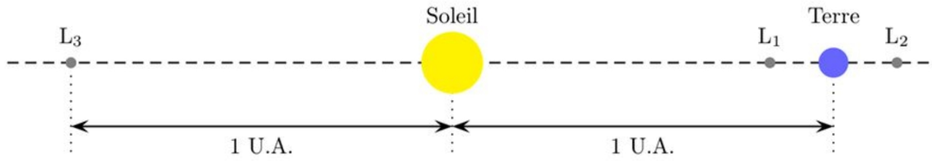
$$(r(t))^{3/2} - (r(0))^{3/2} = \frac{3}{2}Kt.$$

4 Positionnement de télescopes spatiaux

Document 1 : Points de Lagrange

En mécanique céleste, il est un sujet qui a passionné de nombreux mathématiciens : c'est le problème dit « des trois corps ». Joseph-Louis Lagrange étudia le cas d'un petit corps, de masse négligeable, soumis à l'attraction de deux plus gros : le soleil et, par exemple, une planète. Il découvrit qu'il existait des positions d'équilibre pour le petit corps. Un point de Lagrange (il en existe 5, notés L1 à L5) est une position de l'espace où les champs de gravité de deux corps très massifs en orbite l'un autour de l'autre fournissent exactement la force centripète requise pour que ce point de l'espace accompagne simultanément la rotation des deux corps. Dans le cas où les deux corps sont en orbite circulaire, ces points représentent les endroits où un troisième corps de masse négligeable resterait immobile par rapport aux deux autres : il accompagnerait à la même vitesse angulaire leur rotation autour de leur centre de gravité commun sans que sa position par rapport à eux n'évolue. La sonde d'observation SoHO destinée à observer le Soleil a par exemple été placé au point L1.

Document 2 : Positions des points de Lagrange sur l'axe Soleil-Terre



A) Étude de l'orbite du Hubble Space Telescope

On étudie le système (HST) dans le référentiel géocentrique en négligeant l'interaction gravitationnelle du Soleil avec le télescope.

1. Quelle est la trajectoire du télescope spatiale Hubble dans ce référentiel ?

2. À partir de la deuxième loi de Newton, montrer que, dans l'approximation d'une trajectoire circulaire, le mouvement du télescope est uniforme.

3. Montrer que l'expression de la valeur de la vitesse v du satellite dans le référentiel géocentrique est

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

Avec la constante de la gravitation universelle G, la masse de la Terre M_T, le rayon de la Terre R_T et l'altitude du satellite h.

4. Établir l'expression de la période de révolution T du satellite en fonction de R_T, h et v.

5. Rappeler la troisième loi de Kepler. Montrer que dans le cas du télescope spatial Hubble on la relation

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

où $r = R_T + h$ représente la distance entre le centre de la Terre et le télescope spatial Hubble.

B) Position L_2 pour le James Webb Telescope

On se place désormais dans le référentiel "tournant" $\mathcal{R}'$ (non galiléen) de même origine que le référentiel héliocentrique de Copernic mais en rotation synchrone dans le plan de l'écliptique de façon à y voir la Terre immobile à la distance d fixe du Soleil. Dans ce référentiel $\mathcal{R}'$, la deuxième loi de Newton reste vérifiée en introduisant deux forces appelées forces d'inertie : force d'inertie d'entrainement (dite centrifuge) et force d'inertie de Coriolis (dite complémentaire). La force de Coriolis sera négligée tandis que la force d'inertie d'entrainement prendra la forme

$$\vec{F}_{ie} = m\omega_T^2 r_S \overrightarrow{e_r} \text{ avec } \omega_T = \sqrt{\frac{GM_S}{d^3}}$$

6. On note l la distance positive correspondant à la distance Terre- L_2 projetée sur l'axe $\overrightarrow{e_x}$. Déterminer l'équation vérifiée par l en fonction de G, M_T, M_S, ω_T et d.

7. Montrer que l'on peut écrire

$$M_T \frac{d^2}{l^2} + M_S \frac{d^2}{(d+l)^2} = M_S \frac{d+l}{d}$$

8. Les conditions sont telles que $l \ll d$. On rappelle que $(1+\mathcal{E})^\alpha \underset{\mathcal{E}\ll 1}{\sim} 1 + \alpha\mathcal{E}$, en déduire une expression approchée l en fonction de M_T, M_S et d. On peut montrer que la position L_2 est instable, soit par l'étude de la fonction énergie potentielle soit par l'expression de la force totale appliquée au système.

9. Les forces impliquée dans le mouvement du JWST sont-elles centrales ? conservatives ?

10. Déterminer leurs énergies potentielles éventuelles en fonction de l.

11. Comment en déduire qualitativement la position d'équilibre du système ainsi que sa stabilité ?

12. Proposer un raisonnement qualitatif sur les forces appliquées au JWST pour conclure quand à l'instabilité de la position L_2 dans la direction $\overrightarrow{e_x}$.

13. Pourquoi avoir choisi L_2 (où $l = 1,5.10^6$ km) ?