Atmosphère ISA

(Couplé avec TP Pompe à chaleur - 2h chacun)

Capacité exigible : Étudier, à l'aide d'un langage de programmation, les variations de température et de pression dans 1'atmosphère.

Dans le cadre du modèle ISA (International Standard Atmosphere), l'atmosphère est divisée en différentes couches, au sein desquelles la température est supposée suivre une loi affine. La valeur du gradient vertical de température dans chacune de ces couches est normalisée.

Couche atmosphérique	Altitude de la base (en km)	Gradient thermique vertical (en K/km)
Troposphère	0	-6.5
Tropopause	11	0
Stratosphère	20	+1.0
Stratosphère	32	+2.8
Stratopause	47	0
Mesosphère	51	-2.8
Mesosphère	71	-2.0
Mesopause	85	-

On propose ici de déterminer numériquement la loi de variation de la pression atmosphérique avec l'altitude z dans le cadre du modèle ISA, en supposant que l'atmosphère est un gaz parfait au repos dans le référentiel terrestre galiléen et en négligeant les variations de la pesanteur avec l'altitude. On fixe les valeurs de la température et de la pression au niveau du sol (en $z=0$) respectivement à :

$$T_{\text{sol}} = 288 \text{ K} \quad \text{et} \quad P_{\text{sol}} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Notations adoptées :

g	: accélération de la pesanteur
M_{air}	: masse molaire de l'air
R	: constante des gaz parfait
z	: altitude
$k_{\text{ISA}}\ (z)$	: gradient thermique vertical donné par le modèle ISA
$T(z)$	: température atmosphérique à l'altitude z
$P(z)$	: pression atmosphérique à l'altitude z

I. Variations de la pression atmosphérique avec l'altitude dans le cadre du modèle ISA

1. Principe mis en oeuvre

Pour déterminer la loi de variation de la pression P en fonction de l'altitude z, avec les hypothèses mentionnées en introduction, on doit résoudre le système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z) = k_{\text{ISA}}(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}(z) = -\dfrac{M_{\text{ air}}\, g}{RT(z)} \times P(z) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} T(z=0) = T_{\text{sol}} \\ P(z=0) = P_{\text{sol}} \end{array}\right.$$

On propose de conduire la résolution numérique au moyen de la fonction `odeint`, disponible dans le module `scipy.integrate`. L'appel de la fonction `odeint` requiert les trois arguments suivants :

- la fonction définissant le système différentiel à résoudre, qui doit elle-même présenter impérativement deux arguments : le vecteur inconnu que l'on souhaite déterminer, suivi de la variable d'influence par rapport à laquelle on conduit l'intégration numérique du système ;
- les conditions initiales/aux limites du problème, données sous forme d'une liste ou d'un tableau numpy à une dimension ;
- le tableau numpy des valeurs de z pour lesquelles on cherche à obtenir une estimation numérique de la solution ; le premier élément de ce tableau doit impérativement correspondre à «l'endroit» où les conditions initiales/aux limites précédemment données s'appliquent.

$\boxed{1}$ Importer les bibliothèques nécessaires à la manipulation de tableaux, au tracé de graphes et à l'utilisation de la fonction odeint.

$\boxed{2}$ Définir les constantes du problème ainsi que le gradient thermique.

$\boxed{3}$ Définir le système différentiel à résoudre.

$\boxed{4}$ Définir les conditions aux limites ainsi que les valeurs de l'altitude z pour lesquelles on cherche les solutions numériques approchées du système différentiel précédent.

$\boxed{5}$ Récupérer les valeurs de T et de P dans 2 tableaux indépendants.

2. Visualisation des résultats

$\boxed{6}$ Obtenir les graphes correspondants à l'évolution de la température avec l'altitude et à l'évolution de la pression avec l'altitude (on peut ajouter sur ce graphe la courbe du modèle isotherme).

$\boxed{7}$ Afin de comparer les modèles ISA et isotherme, on peut représenter un graphe $\dfrac{|P-P_{\text{iso}}\,|}{P}$ en fonction de l'altitude z.

3. Analyse, discussion.

II. Application : Dimensionnement d'un ballon-sonde atmosphérique

1. Introduction

Les ballons-sonde stratosphériques constituent une solution simple et relativement économique pour envoyer une charge dans l'atmosphère. Équipés de capteurs divers, ils peuvent par exemple permettre de relever les valeurs de la pression, de la température, de l'humidité ou encore de la vitesse du vent dans les différentes couches de l'atmosphère traversées (cf. figures 3 & 4).

Problème posé

On considère ici un ballon-sonde stratosphérique «ouvert», constitué d'une enveloppe de volume V ouverte sur l'extérieur par des manches d'évacuation situées à la base du ballon. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium $\left(M_{\mathrm{He}}=4,0\ \mathrm{g}\cdot\ \mathrm{mol}^{-1}\right)$; l'enveloppe garde un volume constant tout au long de l'ascension. Le ballon étant ouvert à sa base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à la pression atmosphérique. La masse de l'ensemble {enveloppe (hors hélium) + nacelle + instruments embarqués} est $m=10$ kg.
On souhaite que le ballon atteigne l'altitude $z_{\max}=36$ km. Estimer le volume V de l'enveloppe qui permet d'atteindre cette altitude.

2. Éléments de résolution

Hypothèses de travail :
- On adopte le modèle ISA pour décrire les variations de la pression et de la température atmosphériques avec l'altitude.
- On suppose la pression et la température atmosphériques uniformes à l'échelle du ballon-sonde.
- On néglige le volume de la nacelle, du parachute...devant le volume de l'enveloppe.
- On suppose que l'hélium dans le ballon se comporte comme un gaz parfait et qu'il est en permanence en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère.

Avec les hypothèses énoncées précédemment, le ballon plafonne à une altitude telle que la poussée d'Archimède compense exactement le poids du ballon-sonde et de l'hélium qu'il contient. En notant $m_{\mathrm{He}}\left(z_{\max}\right)$ la masse d'hélium restant dans le ballon à l'altitude $z_{\max}$, et $m_{\mathrm{air,depl}}\ \left(z_{\max}\ \right)$ la masse d'air «déplacée» par la présence du ballon, on a donc :

$$m_{\mathrm{He}}\left(z_{\max}\right)+m=m_{\mathrm{axi,depl}}\left(z_{\max}\right)$$

Puis, en exploitant l'équation d'état des gaz parfaits, on aboutit à :

$$V\left(z_{\max}\right)=\frac{mR}{M_{\mathrm{air}}-M_{\mathrm{He}}}\frac{T\left(z_{\max}\right)}{P\left(z_{\max}\right)}$$

$\boxed{8}$ Représenter le volume V en fonction de z.

$\boxed{9}$ Par dichotomie, trouver une valeur approchée de $V\left(z_{\max}\right)$ pour $z_{\max}=36$ km.

$\boxed{10}$ Afficher $V\left(z_{\max}\ \right)$ et le diamètre du ballon correspondant. Conclusion ?