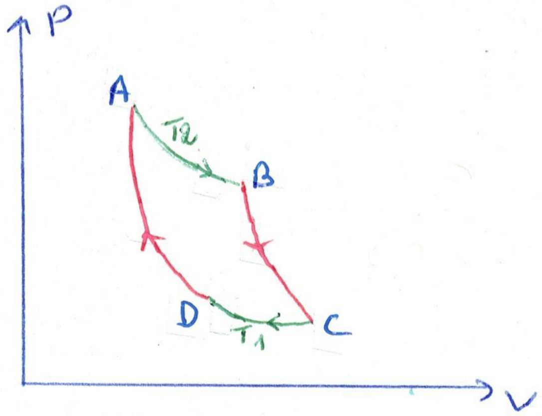
Correction DS n°8

Problème I - Cycle de Carnot

1.



* isotherme : $P = \frac{nRT}{V} \propto \frac{1}{V}$

* adiabatique réversible : $PV^\gamma = cte \Rightarrow P \propto \frac{1}{V^\gamma}$ avec $\gamma > 1$

AB et BC : détentes : $V \nearrow$

CD et DA : compressions : $V \searrow$ et $P \nearrow$.

Le cycle est décrit dans le sens horaire, soit le cycle moteur.

2. a) $W_{AB} = -\int_A^B p_{ext}\, dV \overset{rev}{=} -\int_A^B p_{gaz}\, dV \overset{GP}{=} -\int_A^B \frac{nRT_2}{V} dV = \boxed{-nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$

$\boxed{W_{CD} = -nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}$

$Q_{BC} = 0$ et $Q_{DA} = 0$ (adiabatiques)

AB isotherme : $\Delta U_{AB} = C_V \Delta T = 0 \Rightarrow \boxed{Q_{AB} = -W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$
(1er principe)

De même, $\boxed{Q_{CD} = -W_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}$

$W_{BC} = \Delta U_{BC}$ (1er principe sur adiabatique) ; de même, $W_{DA} = \Delta U_{DA}$

soit $\boxed{W_{BC} = nC_{Vm}(T_1 - T_2)}$ et $\boxed{W_{DA} = nC_{Vm}(T_2 - T_1)}$

b) $W_{tot} = -nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} - nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$

$Q_{chaud} = Q_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$

soit $\eta = \frac{nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}{nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}} = \boxed{1 + \frac{T_1}{T_2} \frac{\ln \frac{V_D}{V_C}}{\ln \frac{V_B}{V_A}}}$

c) D'après les lois de Laplace sur BC et DA : $TV^{\gamma-1} = cte$

soit $T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_C = V_B \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

De même, $T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1} \Rightarrow V_D = V_A \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

soit $\eta = 1 + \frac{T_1}{T_2} \frac{\ln \frac{V_A}{V_B}}{\ln \frac{V_B}{V_A}} = \boxed{1 - \frac{T_1}{T_2}}$

3. 1er principe sur un cycle : $\Delta U_{cycle} = 0 = W_{tot} + Q_{chaud} + Q_{froid}$

2nd principe sur un cycle réversible : $\underset{S^c = 0}{\Delta S_{cycle}} = \frac{Q_{chaud}}{T_2} + \frac{Q_{froid}}{T_1}$

soit $\eta = -\frac{W_{tot}}{Q_{chaud}} = \frac{Q_{chaud} + Q_{froid}}{Q_{chaud}} = 1 + \frac{Q_{froid}}{Q_{chaud}} = \boxed{1 - \frac{T_1}{T_2}}$

On retrouve bien le caractère moteur du cycle avec $\underline{\eta < 1}$.

Problème II - Mesure de l'enthalpie de vaporisation de l'eau

1. Enthalpie massique de vaporisation $l_v = \Delta h_{vap} = h_{vap} - h_{liq}$ $\underline{l_v \text{ en } J.kg^{-1}}$

correspond à la chaleur massique nécessaire à la vaporisation totale, à pression et température constantes.

2. a) Une transformation monobare se fait à pression extérieure constante.

Le premier principe peut alors s'écrire $\Delta H = Q$ sans autre travail extérieur avec $H = U + PV$

Ici, le système total étant calorifugé, $Q = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta H_{tot} = 0}$

b) Système { vase + thermoplongeur + eau liquide }

$\Delta H_{tot} = \Delta H_{vase} + \Delta H_{eau} + \Delta H_{thermoplongeur}$

$\Delta H_{thermoplongeur} = W_{electrique}$

Ici, on se place lors de la vaporisation : $T = cte = 100°C$

$\Delta H_{vase} = 0$

$\Delta H_{eau} = (m_1 - m_2) l_v$

$\Delta H_{thermoplongeur} = -U_1 I_1 \Delta t$

Chaleur perdue par le thermoplongeur

soit $(m_1 - m_2) l_v - U_1 I_1 \Delta t = 0$

c) $\boxed{l_v = \dfrac{U_1 I_1 \Delta t}{m_1 - m_2}}$ $\underline{AN : l_v = 3223 . 10^3 \quad J/kg}$

3. a) $\mathcal{P}_{fuite} = \dfrac{Q_{fuite}}{\Delta t}$

Nouveau bilan : $(m_1 - m_2) l_v - U_2 I_2 \Delta t = \mathcal{P}_{fuite} \Delta t$

$\underline{\text{soit}}$: $\begin{cases} (m_1 - m_2) l_v = (U_1 I_1 + \mathcal{P}_{fuite}) \Delta t_1 \\ (m_1 - m_2) l_v = (U_2 I_2 + \mathcal{P}_{fuite}) \Delta t_2 \end{cases}$

b) On en déduit $\boxed{l_v = \dfrac{\Delta t_1 . \Delta t_2}{\Delta t_2 - \Delta t_1} \left(\dfrac{U_1 I_1 - U_2 I_2}{m_1 - m_2} \right)}$ $\underline{AN : l_v = 2253 \text{ kJ/kg.}}$

c) $\boxed{\mathcal{P}_{fuite} = \dfrac{U_2 I_2 \Delta t_2 - U_1 I_1 \Delta t_1}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = -15 \text{ W}}$

$\underline{\text{Remarque}}$: $\mathcal{P}_{fuite} < 0$, ce qui est en accord avec le fait que la puissance soit perdue par le système.

Problème III – Etudes de compressions et de détentes

1. Pour un gaz parfait : $\boxed{dU = \frac{nR}{\gamma-1}dT}$ et $\boxed{dH = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}dT}$ (avec $C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1}$, $C_{pm} = \frac{R\gamma}{\gamma-1}$)

2. Initialement, $p_1 = p_0$; $T_1 = T_0$; $n = 0{,}2$ mol.

Loi des gaz parfaits : $\boxed{V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{nRT_0}{p_0}}$ AN : $V_1 \simeq 5{,}0.10^{-3}\ m^3$
$\simeq 5{,}0\ L$

Le volume du cylindre étant $V_1 = S.h_1$, $\boxed{h_1 = \frac{V_1}{S}}$ AN : $h_1 = 0{,}5\ m$

3. a) L'évolution étant très lente, on peut la supposer quasi-statique.
Le gaz obéit alors à la loi de Laplace : $pV^\gamma = cte$ (et ses dérivées en fonction de T et p)

Pour un gaz parfait : $dU = \frac{nR}{\gamma-1}dT$

1er principe de la thermo : $dU = \delta W + \delta Q$

Ici, l'évolution est adiabatique : $\delta Q = 0$ et quasi-statique : $\delta W = -p_{gaz}dV$

soit $\frac{nR}{\gamma-1}dT = -nRT\frac{dV}{V} \iff \frac{dT}{T} + (\gamma-1)\frac{dV}{V} = 0$

on reconnait la dérivée logarithmique de $TV^{\gamma-1} = cte$.

En utilisant la loi des gaz parfaits : $T = \frac{pV}{nR} \Rightarrow pV^\gamma = cte$

$V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow T^\gamma.p^{1-\gamma} = cte$

b) On a donc $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$ soit $\boxed{V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}}$ AN : $V_2 = 3{,}7\ L$.

et $p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma}T_2^\gamma \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1.\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$ AN : $T_2 \simeq 337\ K$.

c) D'après le premier principe de la thermodynamique, pour une transformat° adiabatique du gaz : $dU = \delta W$, soit $\boxed{W_R = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)}$

AN : $W_R \simeq 154\ J$. > 0 (compression)

d) $dS = \dfrac{nR}{\gamma-1}\dfrac{dT}{T} - nR\dfrac{dV}{V}$

soit $\boxed{\Delta S = \dfrac{nR}{\gamma-1}\ln\dfrac{T_2}{T_1} - nR\ln\dfrac{V_2}{V_1}}$ <u>AN</u> : $\underline{\Delta S = 0{,}98\ J.K^{-1}}$

Ici, il n'y a pas d'entropie reçue car la transformation est adiabatique, donc l'entropie créée $\underline{S^c = \Delta S > 0}$.
L'évolution est <u>irréversible</u> (bien que quasi-statique !)

4. a) Système {piston} au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : poids $\vec{P}$ (négligé)

Forces de pression : $\vec{F_p} = \underbrace{-p_3 S\vec{u_z}}_{\text{intérieur}} + \underbrace{p_0 S\vec{u_z}}_{\text{extérieur}}$

Force de l'opérateur $\vec{F} = F\vec{u_z}$

1ère loi de Newton : $\vec{F_p} + \vec{F} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{F} = (p_3 - p_0)S\,\vec{u_z}}$

<u>AN</u> : $\underline{F = 0{,}5.10^{-2}\ N}$.

b) Travail $W_i = -\int_1^3 p_{ext}\,dV = -\left(\dfrac{F}{S} + p_0\right)\int_1^3 dV = -\left(\dfrac{F}{S} + p_0\right)(V_3 - V_1)$

Or, $p_3 = p_0 + \dfrac{F}{S}$ $\Rightarrow$ $\boxed{W_i = -p_3(V_3 - V_1)}$

c) Premier principe appliqué au gaz : $\Delta U_{13} = W_{13} = W_i$ $(Q = 0)$

Soit $\dfrac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_1) = -p_3(V_3 - V_1)$ or $nRT = pV$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\gamma-1}(p_3V_3 - p_1V_1) = -p_3(V_3 - V_1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\gamma-1}\left(V_3 - \dfrac{p_1}{p_3}V_1\right) = -V_3 + V_1$) % p_3

$\Rightarrow V_3\left(\dfrac{1}{\gamma-1} + 1\right) = V_1\left(1 + \dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{p_1}{p_3}\right)$

$\Rightarrow \boxed{V_3 = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}V_1\left(1 + \dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{p_1}{p_3}\right)}$ <u>AN</u> : $\underline{V_3 = 3{,}8L}$

loi des GP : $\boxed{T_3 = \dfrac{p_3V_3}{nR}}$ <u>AN</u> : $\underline{T_3 = 342\ K}$

d) AN : $\underline{W_i = 180\,J}$ $> W_r$

L'opérateur fournit plus de travail lors de la transformation brutale.

e) $\underline{\Delta S = 1{,}0\ J.K^{-1}}$ (avec la même formule qu'en 3d))

$Q = 0 \Rightarrow S^e = 0$ d'où $\underline{S^c = \Delta S > 0}$ L'évolution est irréversible.

5. a) Loi des GP : $\boxed{p_4 = \frac{nRT_4}{V_4}}$ AN : $\underline{p_4 = 1{,}8 \cdot 10^5\ Pa}$.

b) Le gaz dans le cylindre subit une détente adiabatique jusqu'à p_0

1er principe : $\Delta U = W + \underset{=0}{Q}$ or $W_{détente} < 0$ car détente

$\Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow \boxed{T_5 < T_4}$

c) Etat final : $p_5 V_5 = (n - n')RT_5 \Rightarrow \boxed{n' = n - \frac{p_0 V_4}{RT_5}}$ AN : $\underline{n' = 7{,}8 \cdot 10^{-2}\ mol}$

d) En considérant le système fermé contenant n' moles qui s'échappent dans un volume supplémentaire V_S à la pression p_0 :

$$W = -p_0 (V_4 + V_S - V_S) = -p_0 V_4 = \boxed{-n'RT_4} \boxed{= -n'RT_0}$$

AN : $\underline{W = 195\,J \quad > 0}$ (compression)

e) $\Delta S = \Delta S_{n'} + \Delta S_{n-n'}$ avec $\Delta S_{n'}$ la variation d'entropie subie par n'

et $\Delta S_{n-n'}$ la variation d'entropie subit par $n - n'$ (gaz dans le cylindre)

$$\text{soit } \boxed{\Delta S = \frac{n'R\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_0}{T_0} - n'R \ln \frac{p_0}{p_4} + \frac{(n-n')R\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_5}{T_0} - (n-n')R \ln \frac{p_0}{p_4}}$$

AN : $\underline{\Delta S = 0{,}67\,J.K^{-1}}$

D'après le 1er principe : $\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = \Delta U - W = \frac{(n-n')R(T_5 - T_0)}{\gamma - 1} + n'RT_4$

soit $\boxed{S^e = \frac{Q}{T_0} = \frac{(n-n')R}{\gamma - 1}\left(\frac{T_5}{T_0} - 1\right) + n'R}$ AN : $\underline{S^e = 0{,}45\,J.K^{-1}}$

Soit l'entropie créée : $\underline{S^c = \Delta S - S^e = 0{,}22\ J.K^{-1}} > 0 \Rightarrow$ évolution irréversible.

6. Système {m'' dans le cylindre}

a) La transformation est isochore : $V = V_4 = cte \Rightarrow \frac{nRT}{P} = cte$.

soit $\frac{m'' R T_5}{P_5 = p_0} = \frac{m'' R T_0}{p_6} \Rightarrow \boxed{p_6 = p_0 \frac{T_0}{T_5}}$ AN : $p_6 = 1,1.10^5$ Pa

b) 1er principe : $\frac{m'' R}{\gamma - 1}(T_6 - T_5) = \underset{\substack{\| \\ 0 \\ \text{(isochore)}}}{W} + Q$

Soit $Q = \frac{m'' R}{\gamma - 1}(T_6 - T_5) = \frac{m'' R}{\gamma - 1}(T_0 - T_5)$ AN : $Q = 60,9$ J

c) $\Delta S = \frac{m'' R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_0}{T_5} - m'' R \ln \frac{V_4}{V_4} = \boxed{\frac{m'' R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_0}{T_5}}$ AN : $\Delta S = 0,24$ J.K^{-1}

$\boxed{S^e = \frac{Q}{T_0}}$ AN : $S^e = 0,20$ J.K^{-1}

Soit $S^c = \Delta S - S^e = 0,04$ J.K^{-1} $> 0 \Rightarrow$ évolution irréversible.

7. a) Loi des GP : $PV = nRT = \frac{m_v R T}{M}$ soit $\boxed{m_v = \frac{M P_2 V_7}{R T_7}}$

* avec M la masse molaire de l'eau

AN : $m_v = 5,16$ g soit $x_v = \frac{m_v}{m} = 0,57$ ← titre massique en vapeur d'eau.

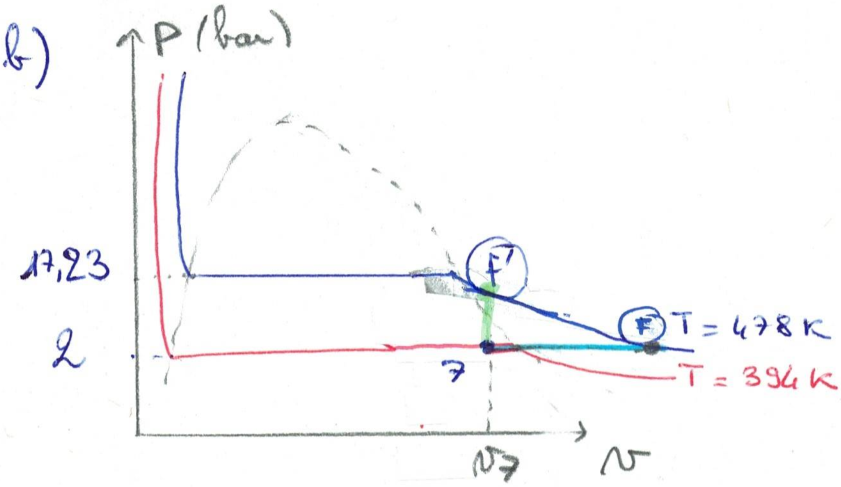
(en faisant l'hypothèse que la vapeur d'eau se comporte comme un GP).

* Sinon : théorème des moments : $x_v = \frac{v - v_\ell}{v_v - v_\ell} = \frac{\frac{V_7}{m} - v_\ell}{v_v - v_\ell} = 0,61$

(en utilisant les tables fournies)

↳ Les données engageaient à utiliser plutôt cette 2e méthode.

b)



$p = p_7 = \text{cte}$: transformation isobare : $\Delta H = Q_p$

$p_7 < p_{sat}(478\,K)$ donc l'eau se trouve sous forme de vapeur sèche.

Variation d'entropie $\Delta H = \underbrace{(1-x_7)\, m\, l_v(T_7)}_{\text{fin de la vaporisation de l'eau}} + \underbrace{m\, c_{p,v}(T_F - T_7)}_{\text{2e loi de Joule pour le gaz}}$

soit le transfert thermique $\boxed{Q_p = (1-x_7)\, m\, l_v(T_7) + m\, c_{p,v}(T_F - T_7)}$

AN : $Q_p = 1{,}5 \cdot 10^3\ J$

c) $V = \text{cte}$: transformation isochore : $\Delta U = Q_v$

(1er principe : $\Delta U = \underset{0}{W} + Q_v$ (pas de travail des forces de pression ni autres)

or, $\Delta U = \underbrace{\Delta U_{7F}}_{\text{isobare}} + \underbrace{\Delta U_{FF'}}_{\text{isotherme} \Rightarrow 0}$

or $\Delta U_{7F} = \underbrace{\Delta H_{7F}}_{Q_p \text{ calculé en b)}} - \Delta_{7F}(pV) = Q - p_{sat}(394\,K)(V_F - V_7)$

$= Q_p - \underbrace{nRT_F}_{GP} + p_{sat} V_7$

Soit $\boxed{Q_V = Q_P - \frac{m}{M} R T_F + p_{sat} V_7}$ AN : $Q_V = 0{,}45 \cdot 10^3\ J$

$Q_V < Q_P$