

# Introduction au monde quantique

“ Si vous pensez comprendre la mécanique quantique, c’est que vous ne comprenez pas la mécanique quantique ”

Richard Feynman, prix Nobel, inventeur de l’électrodynamique quantique.

## Ce qu’il faut connaître

- Citer la relation de Planck-Einstein
- Citer les relations de De Broglie
- Définir un écart type  $\Delta x$
- Citer la relation d’incertitude de Heisenberg portant sur position et impulsion

## Ce qu’il faut savoir faire

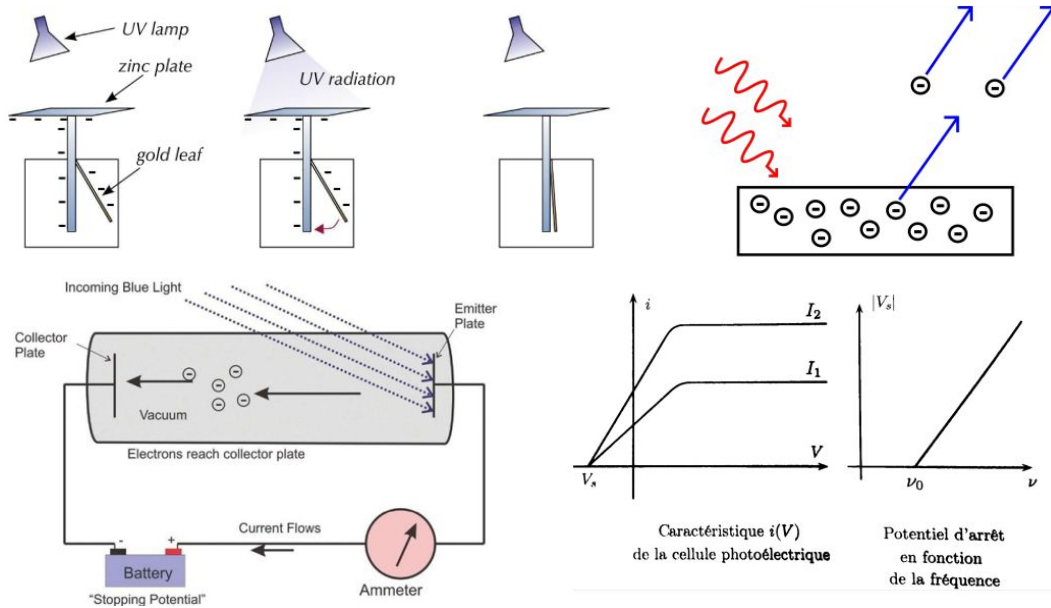
- Justifier le comportement quantique ou classique d’un système
- Interpréter en terme probabiliste la fonction d’onde.
- Interpréter une expérience de diffraction par le principe d’Heisenberg
- Retrouver les niveaux d’énergie d’une particule dans un puits infini par analogie avec la corde de Melde
- Retrouver l’énergie minimale de confinement dans le cas d’un puits infini par le principe d’Heisenberg
- Retrouver les niveaux d’énergie de l’atome de Bohr

## I. Aspect corpusculaire de la lumière

A la fin du 19<sup>è</sup>, la lumière est décrite comme une onde. On explique ainsi les phénomènes d’interférence, de diffraction,...

### 1. Effet photoélectrique (pas à apprendre, juste une introduction historique...)

Un métal exposé à la lumière peut émettre des électrons.



Caractéristiques des courbes :

- Pour un métal donné il existe une fréquence seuil  $\nu_0$  de la source lumineuse en dessous de laquelle aucun courant électrique n’apparaît. Au dessus de cette fréquence seuil le courant électrique (i.e. le nombre d’électrons arrachés) est proportionnel à l’intensité de la source lumineuse.
- La valeur du potentiel d’arrêt  $V_s$  est indépendante de l’intensité de la source lumineuse.

### 2. Le photon pour expliquer l’effet photoélectrique

La lumière est constituée de photons d’énergie  $E_\nu = h\nu$ , avec  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{Js}$  la constante de Planck

Lors de l’expérience précédente une fréquence lumineuse minimale est nécessaire pour arracher des électrons, donc une énergie minimale. Soit  $W_{ext}$  l’énergie nécessaire pour extraire un électron du métal,

$$W_{ext} = h\nu_0$$

Pour  $\nu > \nu_0$ , il reste de l’énergie excédentaire cinétique

$$h\nu = W_{ext} + E_c$$

### Relation de Planck-Einstein

Relient les comportements ondulatoire et corpusculaire des photons :

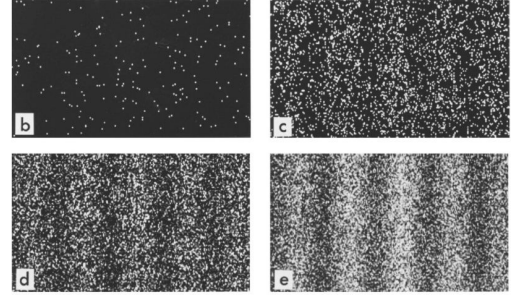
- Energie  $E_\nu = h\nu = \hbar\omega$

- Impulsion (homogène à une quantité de mouvement)  $p_\nu = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$

avec  $\omega = 2\pi\nu$ , vecteur d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  Constante de Planck réduite.

### 3. Interférences particule par particule

Si l'on envoie des photons/électrons un par un sur des fentes d'Young on verra apparaître impact après impact la figure d'interférences classiquement observée en optique. Cela signifie que l'on peut dire que chaque photon passe par les deux fentes d'Young simultanément et interfère avec lui-même !



Construction progressive d'une figure d'interférences d'électrons. Chaque point lumineux correspond à l'arrivée d'un électron. Nombres d'électrons respectifs sur les images (b), (c), (d) et (e) : 100, 3000, 20000 et 70000.

Pendant si l'on place des détecteurs derrière les fentes d'Young, un photon n'en active qu'un seul : lors de l'observation un photon passe par une unique fente. Dans ce cas on ne verra pas apparaître la figure d'interférence sur l'écran ! Cela peut sembler très surprenant mais en réalité illustre l'effet de la mesure sur un système quantique : sans observation le système quantique se trouve dans une superposition d'états (fente gauche ET fente droite) et aura un comportement quantique ; avec observation l'état est réduit (fente gauche OU fente droite).

Les interférences apparaissent lorsqu'un objet quantique peut emprunter plusieurs chemins pour arriver au même détecteur, et que ces chemins sont indiscernables après détection.

L'interaction avec le dispositif expérimental "crée" l'état observé de la mesure.

Résumé : Des expériences d'interférence ont été depuis réalisées avec des particules de plus en plus massives (jusqu'à des protéines !), mettant en évidence la dualité onde-corpuscule à plus "grande" échelle.

### 4. Interprétation

On peut généraliser les relations relatives au photon aux particules massives :

#### Relations de De Broglie

Une particule d'énergie  $E$  et de quantité de mouvement  $p = mv$  peut présenter un comportement ondulatoire :

- de fréquence  $\nu_{DB} = \frac{E}{h}$  ;

- de longueur d'onde  $\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ .

Le comportement ondulatoire est perceptible si  $\lambda_{DB} \sim$  dimension de l'objet

Exemples : Calculer  $\lambda_{DB}$  d'une balle de tennis (60g, 100km/h), d'un électron ( $9.10 \cdot 10^{-31}$  kg, 1eV)

## II. Interprétation probabiliste

### 1. Amplitude de probabilité

#### Fonction d'onde $\psi$ ; probabilité de présence $\mathcal{P}$

L'état physique d'un objet quantique est parfaitement défini par une fonction d'onde complexe  $\psi(M, t)$  qui représente l'amplitude de probabilité. La probabilité de présence d'un objet quantique est proportionnelle à l'amplitude de probabilité au carré

$$\mathcal{P}(M, t) = |\psi(M, t)|^2.$$

⇒ La probabilité pour qu'un objet quantique se trouve dans un volume  $dV$  autour du point  $M$  à l'instant  $t$  est  $dP = |\psi(M, t)|^2 dV$ .

⇒ Si on intègre sur tout l'espace dans lequel un objet quantique peut se trouver on obtient une probabilité de présence  $\iiint |\psi(M, t)|^2 dV = 1$ .

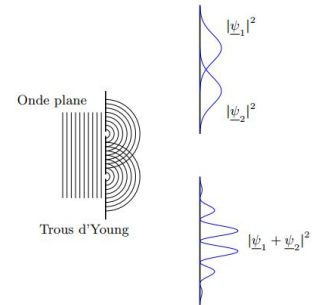
### 2. Interprétation probabiliste d'une expérience

- Chemins discernables : pas d'interférences car l'objet quantique n'emprunte qu'un unique chemin connu de l'observateur :

$$\mathcal{P} \propto |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2.$$

- Chemins indiscernables : L'objet quantique passe par ces différents chemins et peut interférer :

$$\mathcal{P} \propto |\psi_1 + \psi_2|^2.$$



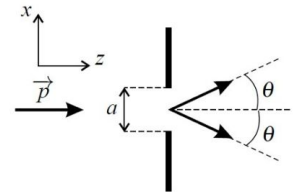
**Postulat de la réduction du paquet d'onde :** Si l'on mesure une grandeur physique quantique d'un système dans une superposition d'état (ex : interférences en chemins indiscernables), le système est immédiatement projeté dans un sous-état qui n'est pas une superposition (ex : particule passe par la fente de droite).

## III. Principe d'indétermination de Heisenberg

La nature quantique d'un objet nous empêche de connaître précisément à la fois sa position et sa vitesse. Ne pouvant connaître la position et la vitesse d'un objet quantique avec exactitude, la notion de trajectoire perd tout son sens.

### 1. Introduction : diffraction par une fente

**EC1 :** Revenons à l'expérience de diffraction citée en optique. Considérons cette expérience pas nécessairement réalisée avec des photons mais avec toutes particules auxquelles on associe une onde de longueur d'onde  $\lambda$ . Plus la fente est fine, plus la tache de diffraction est large. On note  $\theta$  la demi-largeur angulaire de la tache centrale de diffraction,  $a$  la largeur de la fente.



1/ Rappeler l'allure de la figure obtenue sur l'écran, et la relation entre  $\theta$  et  $a$

2/ Evaluer l'incertitude  $\Delta x$  associée au fait que la particule passe par la fente

3/ Relier géométriquement  $\theta$ ,  $p_x$  et  $p$

4/ Estimer grossièrement  $\Delta p_x$  en fonction de  $p_x$

5/ En déduire en utilisant la relation de De Broglie, une relation approchée entre le produit  $\Delta x \Delta p_x$  et la constante de Planck  $h$ .

Cette égalité vérifie une relation plus générale connue sous le nom d'incertitude d'Heisenberg :

### Principe d'indétermination de Heisenberg

La mesure à un instant donné de la position  $x$  (resp.  $y$  et  $z$ ) et de l'impulsion  $p_x$  (resp.  $p_y$  et  $p_z$ ) d'un objet quantique est contrainte par les indéterminations fondamentales  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$  (resp.  $\Delta y, \Delta p_y$  et  $\Delta z, \Delta p_z$ ) vérifiant

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar; \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar; \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar;$$

Remarque essentielle :  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$  traduisent une indétermination physique, ce n'est pas une question de manque de précision de l'appareil de mesure. Autrement dit, même avec des appareils (fictifs) qui seraient infiniment précis, répéter un grand nombre de fois la même mesure donnerait toujours des résultats qui présenteraient une dispersion statistique  $\Delta x$  et  $\Delta p_x$ .

## 2. Un poil de statistique

### Moyenne & Écart type

Définition : l'écart type  $\Delta x$  d'une distribution de valeurs de  $x$  est définie par

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}.$$

Application importante : cas d'une valeur moyenne nulle. Alors

### Des valeurs nécessairement approchées...

Ne pas oublier qu'on parle d'incertitudes. Comme nous n'avons pas de description statistique précise des valeurs prises par les quantités étudiées, les évaluations se font en ordre de grandeur. Suivant les exercices, les auteurs, les facteurs numériques varient...

Souvent on prendra par exemple pour  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  la moyenne de la norme/valeur absolue  $\langle |x| \rangle \dots$

## 3. Application à une particule confinée

**EC 2 :** On suppose une particule confinée, astreinte à se déplacer selon l'axe  $Ox$  dans un puits de potentiel infini de largeur  $a$ .

1/ Que vaut  $\Delta x$ ? En déduire  $\Delta p_x$

2/ Que vaut  $\langle p_x \rangle$ ? En déduire  $\langle p_x^2 \rangle$

3/ En déduire l'énergie cinétique minimale de la particule confinée.

## IV. Quantification de l'énergie

### 1. Modèle du puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie.

**EC 3 :** On reprend le puits infini vu précédemment, dans lequel nous envisageons une onde de matière de De Broglie. On raisonnera par analogie avec la corde de Melde : la superposition des ondes progressives et régressives sur les "parois" du puits vont engendrer des ondes de matière stationnaires dans le puits, en cas de superposition constructive

1/ Quelles sont les conditions aux limites sur l'onde notée  $\Psi(x)$ ?

2/ Tracer par analogie avec Melde, les trois premiers modes possibles. En déduire une relation entre  $\lambda_{DB}$  et  $a$ .

3/ En déduire les niveaux d'énergie  $E_n$  accessibles à la particule, en fonction de  $h, n, m$  et  $a$ .

4/ Comparer  $E_1$  avec le niveau d'énergie minimal obtenu avec la relation d'Heisenberg.

4/ AN : Un élève s'agite sur sa chaise en cours de maths. Est-ce un effet de confinement quantique qui se manifeste ? On pourra calculer le niveau d'énergie occupé par l'élève.

## 2. Modèle planétaire de Bohr.

**EC4 :** Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse  $m$ , charge  $-e$ ) est en orbite circulaire de rayon  $r$  autour d'un proton  $P$  (charge  $+e$ ) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données : constante de Planck  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J·s ; vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup> ; permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F·m<sup>-1</sup> ; charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C ; masse de l'électron  $m = 9,1 \cdot 10^{-30}$  kg ; 1,0eV =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  J.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse  $v$  de l'électron et le rayon  $r$  de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon  $r$  de l'orbite.

3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons  $r_n$  tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point  $P$  vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où  $n$  est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et  $\hbar = h/2\pi$  la constante de Planck réduite.

4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron  $L_P$  en fonction de  $r_n$  seulement.

5 - En déduire en fonction de  $n$  les rayons  $r_n$  des orbites permises pour l'électron.

6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}.$$

Calculer numériquement  $E_0$ .

7 - Montrer que l'on retrouve la quantification du moment cinétique proposée par Bohr en supposant que l'onde de De Broglie associée à l'électron en rotation uniforme autour du noyau satisfait  $L = n\lambda$ ,  $L$  étant le périmètre de la trajectoire de l'électron.

Si  $n$  est très grand, alors la particule n'est plus confinée, et les niveaux d'énergie se rapprochent jusqu'à devenir un continuum d'énergie comme en mécanique classique. C'est le confinement de la particule qui crée la quantification de l'énergie.