

TD Introduction au monde quantique

1 Effet photoélectrique

On dispose d'une photocathode au césium éclairée par une lumière monochromatique.

1. La longueur d'onde seuil pour le césium est $\lambda_0 = 0.66\mu\text{m}$. Déterminer le travail d'extraction W_0 d'un électron en eV.
2. La lumière qui éclaire cette photocathode a une longueur d'onde $\lambda = 0.44\mu\text{m}$.
- 2.a Déterminer l'énergie cinétique maximale d'un électron émis par la cathode.
- 2.b Déterminer la vitesse de cet électron.

Données : masse de l'électron $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J, vitesse de la lumière $c = 3,0 \cdot 10^8$ m · s⁻¹, constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s⁻¹.

2 Neutron thermique

Un neutron thermique est un neutron de faible énergie. Si l'on note m sa masse, v sa vitesse, son énergie cinétique moyenne d'agitation thermique à la température absolue T est donnée par la relation

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K⁻¹ est la constante de Boltzmann et $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

1. Exprimer la longueur d'onde associée à un tel neutron en fonction de la température puis faire l'application numérique pour une température $T = 300$ K.
2. Expliquer pourquoi et comment ces neutrons peuvent conduire à une diffraction.

3 Rayonnement stellaire

Les étoiles visibles les plus faibles du ciel émettent un rayonnement possédant, au niveau de la Terre, une puissance surfacique de l'ordre de 10^{-14} W · cm⁻².

1. Combien l'oeil reçoit-il de photon chaque seconde d'une telle étoile ?
2. Pour une perception continue de la lumière, les cellules de l'oeil doivent être excitées environ toutes les 0,1 secondes. Commenter.

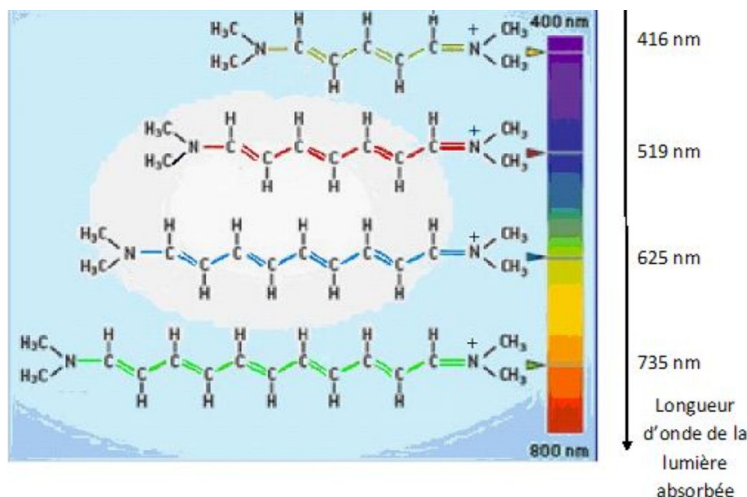
4 Vitesse de propagation d'une onde de De Broglie

Une particule de masse m se déplace à la vitesse v très inférieure à la vitesse de la lumière. Elle n'est soumise à aucune force donc son énergie se réduit à son énergie cinétique.

1. Exprimer le vecteur d'onde k_{DB} de l'onde de De Broglie en fonction de m et v . En déduire la longueur d'onde λ_{DB} associée.
2. Exprimer la fréquence ν_{DB} de l'onde de De Broglie en fonction de m et v .
3. L'onde de De Broglie est par définition une onde, quelle relation existe-t-il entre la célérité c , la fréquence ν_{DB} et la longueur d'onde λ_{DB} ?
4. Déduire de la question précédente la relation entre la célérité de l'onde de De Broglie et la vitesse de la particule v .

5 Les cyanides

Les cyanides sont des colorants organiques. Le but de cet exercice est de montrer que leur couleur est simplement liée à leur longueur. En général, établir le lien entre la structure d'une molécule et les longueurs d'onde qu'elle absorbe est complexe. La particularité de la structure des cyanides en permet une estimation simple.



Les cyanides sont des molécules formées d'une chaîne carbonée. Les électrons participant aux liaisons π , c'est-à-dire participant à la seconde liaison de la liaison double, ne sont pas localisés entre deux atomes, mais répartis tout au long de la chaîne. La molécule peut alors être modélisée pour ces électrons par un fil conducteur de longueur L .

La distance entre deux atomes de carbone, ou entre un atome de carbone et un atome d'azote est $d_{C-C} = d_{C-N} = 0,14$ nm.

1. Rappeler rapidement les longueurs d'onde possibles pour la fonction d'onde associée à un électron dans une boîte de longueur L . En déduire sa quantité de mouvement. Exprimer alors les valeurs d'énergie associées \mathcal{E}_n de l'énergie de l'électron en fonction de n , de la constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s, de la masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et de la longueur L de la molécule. On s'intéresse à la molécule possédant 9 atomes de carbone.

2. Quelle est la longueur L du fil associé? On supposera qu'il faut considérer tous les atomes possédant une double liaison, ainsi que le second atome d'azote, et que le fil associé dépasse les 2 atomes extrémaux d'une demi-liaison. On considérera enfin que les atomes sont en ligne droite.

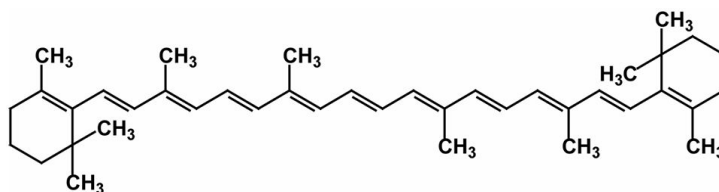
3. Calculer les niveaux d'énergie en électron-volt jusqu'à $n = 7$. Les représenter graphiquement.

4. Les électrons π des doubles liaisons, ainsi que 2 électrons pour l'atome d'azote non engagé dans une double liaison peuvent accéder aux niveaux d'énergie précédemment déterminés. Tracer alors le diagramme d'occupation dans l'état d'énergie le plus bas.

5. Quelle est la transition pour l'excitation de plus basse énergie? Quelle est la longueur d'onde d'un photon permettant une telle transition. La comparer à la valeur annoncée. Quelle est alors la couleur du colorant?

6 Énergie et fonction d'onde d'un électron confiné - Programme de deuxième année

Certaines molécules ayant une longueur de chaîne linéaire comme le β -carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier, mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule.



On modélise un tel électron, de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$; L'énergie potentielle E_p est nulle sur le segment et infiniment grande partout ailleurs (particule dans un puits de potentiel). Sa fonction d'onde $\psi(x)$ est alors liée à son énergie totale \mathcal{E} par l'équation différentielle

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x)$$

équation de Schrödinger indépendante du temps où \hbar est la constante réduite de Planck.

1. On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'onde $\psi(x)$.

1.a Justifier que $\psi(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[0; L]$.

1.b $\psi(x)$ étant une fonction continue, elle est donc nulle aux deux extrémités de la molécule : $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

2. Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

où n est un entier et A une constante d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer.

3. En déduire l'expression des niveaux d'énergie \mathcal{E}_n en fonction de m , L , h et n .

4. Dans le β -carotène (formule ci-contre), ce sont les électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées, sur une longueur $L = 1,83$ nm. Dans l'état fondamental, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas.

4.a Calculer les niveaux d'énergie \mathcal{E}_{11} et \mathcal{E}_{12} en eV. On donne $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s et $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

4.b En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde λ dans le vide, d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12. On donne $c = 3 \cdot 10^8$ m \cdot s $^{-1}$.

4.c Expliquer alors la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de ces molécules (carotte, citrouille...).