

## Corrigé du sujet Mines 2 PC 2025

Ce corrigé à été rédigé par Marie THOREY. N'hésitez pas à me signaler par mail (thoreymarie@aol.com) toute coquille ou erreur.

1. Le champ de pesanteur à l'altitude  $z$  a pour norme  $g(z) = \mathcal{G} \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$ . Au niveau du sol, on a  $g_0 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2}$ .

$$\text{En haut de la troposphère, la variation relative vaut } \frac{g_0 - g(h)}{g_0} = 1 - \left( \frac{R_T}{R_T + h} \right)^2 = 0,44\%$$

On obtient donc bien une variation de moins de 0,5%.

2. D'après la relation fondamentale de la statique des fluides,  $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ . Comme l'atmosphère est considérée comme un gaz parfait,  $\rho = \frac{P \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT}$ , d'où  $\frac{dP}{dz} = -\frac{P \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT} g$ .

$$\text{On en déduit que } \frac{dP}{P} = -\frac{\mathcal{M}_{\text{air}} g}{RT_0(1 - \Gamma z)} dz.$$

$$\text{En posant } H_0 = \frac{RT_0}{\mathcal{M}_{\text{air}} g} \text{ et } H_1 = \frac{1}{\Gamma}, \text{ on obtient bien } \frac{dP}{P} = -\frac{1}{1 - z/H_1} \frac{dz}{H_0}$$

$$\text{On a } T_h = T_0(1 - \Gamma h), \text{ d'où } \Gamma = \frac{1}{h} \left( 1 - \frac{T_h}{T_0} \right) \text{ et } H_1 = \frac{h}{1 - \frac{T_h}{T_0}} = 46 \text{ km}$$

$$\text{Par ailleurs, } H_0 = 8,8 \text{ km}$$

3. En intégrant, on a  $\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\int_0^z \frac{1}{1 - z/H_1} \frac{dz}{H_0}$ , soit  $\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{H_1}{H_0} \ln(1 - z/H_1)$ .

$$\text{On en déduit que } P(z) = P_0(1 - z/H_1)^k \text{ avec } k = \frac{H_1}{H_0} = 5,3.$$

$$\text{Au sommet de la troposphère, } P(h) = P_0(1 - h/H_1)^k = 0,15 \text{ bar}$$

4. La résultante des forces de pression correspond à la poussée d'Archimède, donc la résultante des forces de pesanteur et de pression exercées sur le volume d'air s'écrit  $\vec{F} = (\rho_S(z) - \rho_{\text{air}}(z))V\vec{g}$

5. On applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen au volume  $V$  d'air, projeté sur un axe vertical dirigé vers le haut :  $\rho_S(z)V\ddot{z} = (\rho_{\text{air}}(z) - \rho_S(z))Vg$ .

$$\text{On obtient l'équation différentielle suivante : } \ddot{z} = \frac{\rho_{\text{air}}(z) - \rho_S(z)}{\rho_S(z)} g$$

Si l'air est plus froid que l'air environnant,  $\rho_S > \rho_{\text{air}}$ , donc  $\ddot{z} < 0$  et l'air va redescendre. L'atmosphère est donc stable.

6. Avec un développement limité à l'ordre, 1, on peut écrire  $\rho_{\text{air}}(z) \simeq \rho_{\text{air}}(z_0) + (z - z_0) \frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{air}}$

$$\text{et } \rho_S(z) \simeq \rho_S(z_0) + (z - z_0) \frac{d\rho}{dz} \Big|_S.$$

$$\text{Comme } \rho_S(z_0) = \rho_{\text{air}}(z_0), \text{ on en déduit que } \ddot{z} = (z - z_0)g \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_{\text{air}} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_S \right).$$

$$\text{On obtient bien } \ddot{z} + N^2 z = N^2 z_0 \text{ avec } N^2 = g \left( \frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_S} \right)$$

7. D'après la loi des gaz parfaits,  $\rho_{\text{air}} = \frac{P \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT} = \frac{P_0 \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT_0} (1 - \Gamma z)^{k-1}$ .

$$\text{On en déduit que } \frac{1}{h_{\text{air}}} = -\frac{RT_0}{P_0 \mathcal{M}_{\text{air}}} (1 - \Gamma z)^{1-k} \times (-\Gamma)(k-1) \frac{P_0 \mathcal{M}_{\text{air}}}{RT_0} (1 - \Gamma z)^{k-2}$$

$$\text{On obtient finalement } \frac{1}{h_{\text{air}}} = \Gamma(k-1)(1 - \Gamma z)^{-1}, \text{ soit } \frac{1}{h_{\text{air}}} = \Gamma(k-1) \frac{T_0}{T(z)}$$

8. Dans le cas d'une évolution adiabatique et réversible, d'après les lois de Laplace,  $P(z)\rho(z)^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma}$ .

On en déduit que  $\rho(z) = \rho_0 \left( \frac{P(z)}{P_0} \right)^{1/\gamma}$ , soit  $\rho(z) = \rho_0(1 - \Gamma z)^{k/\gamma}$ .

On a alors  $\frac{1}{h_S} = -\frac{1}{\rho_0(1 - \Gamma z)^{k/\gamma}} \times (-\Gamma) \frac{k}{\gamma} \rho_0(1 - \Gamma z)^{k/\gamma - 1}$ , soit  $\frac{1}{h_S} = \Gamma \frac{k}{\gamma} \frac{T_0}{T(z)}$

9. On a  $k - 1 = 4$  et  $k/\gamma = 3,6$ , donc  $(1/h_{\text{air}}) > (1/h_S)$  et  $N^2 > 0$ . L'atmosphère est donc bien stable.

10. On peut prendre  $[F_v = \rho_{\text{air}} R^2 v^2]$ , car on a alors  $[F_v] = M.L^{-3}.L^2.L^2.T^{-2} = M.L.T^{-2}$  ce qui correspond bien à la dimension d'une force.

11.  $x = \frac{\rho_{\text{air}} R^2 v^2}{\rho_{\text{He}} \frac{4}{3} \pi R^3 g} = \frac{3 \mathcal{M}_{\text{air}} v^2}{4 \pi \mathcal{M}_{\text{He}} R g}$ , soit  $x = \frac{3v^2}{4\pi d R g}$

La force du vent est prépondérante si  $x > 1$ , soit  $R < \frac{3v^2}{4\pi d g}$ . On a ainsi  $[R_c = 196 \text{ m}]$

12. On note  $M_{ei}$  la masse de l'enveloppe et des instruments. Lorsque le poids du ballon est compensé par la poussée d'Archimède de l'air, il plafonne et finit par exploser. On a alors  $(M_{ei} + \rho_{H_2} V)g = \rho_{\text{air}} V g$ .

On en déduit que  $M_{ei} = (\rho_{\text{air}} - \rho_{H_2})V$ , d'où  $[M_{ei} = (\mathcal{M}_{\text{air}} - \mathcal{M}_{H_2}) \frac{P_{\text{min}} V}{RT_{\text{min}}} = 1,8 \text{ kg}]$

13. Les composantes horizontales des forces de traction se compensent, d'où  $[\vec{f} = -\xi 2\pi R \sin^2 \theta . \vec{u}_z]$

De même, les composantes horizontales des forces de pression se compensent, et

$$\vec{F}_p = (P_i - P_e) \int_0^\theta 2\pi R^2 \sin \alpha . \cos \alpha d\alpha . \vec{u}_z = \pi R^2 (P_i - P_e) [\sin^2 \alpha]_0^\theta . \vec{u}_z$$

On obtient finalement  $\vec{F}_p = \pi R^2 (P_i - P_e) \sin^2 \theta . \vec{u}_z$ , soit  $[\vec{F}_p = \pi r^2 (P_i - P_e) . \vec{u}_z]$

14. A l'équilibre, les forces qui s'appliquent sur la partie haute du ballon se compensent, donc  $\pi r^2 (P_i - P_e) = \xi 2\pi R \sin^2 \theta$ , soit  $R^2 \sin^2 \theta (P_i - P_e) = \xi 2R \sin^2 \theta$ .

On obtient bien  $[P_i = P_e + \frac{2\xi}{R}]$

15.  $[\xi = \frac{R(P_i - P_e)}{2} = 1.10^5 \text{ N.m}^{-1} \text{ et } \beta = 1]$

16. La transformation étant adiabatique et réversible, on peut utiliser les lois de Laplace pour l'hélium dans le ballon :  $P_1 \left( \frac{4}{3} \pi R_1^3 \right)^{\gamma_{\text{He}}} = P_i(z) \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{\gamma_{\text{He}}}$  soit  $\left( P_0 + \frac{2\xi}{R_1} \right) x^{3\gamma_{\text{He}}} = P_e(z) + \frac{2\xi}{R}$ .

On en déduit que  $\delta(z) = \frac{P_e(z)}{P_0} = \left( 1 + \frac{2\xi}{R_1 P_0} \right) x^{3\gamma_{\text{He}}} - \frac{2\xi}{R P_0}$ , soit  $[\delta(z) = (1 + \beta) x^{3\gamma_{\text{He}}} - \beta x]$  et  $\psi(x) = (1 + \beta) x^{3\gamma_{\text{He}}} - \beta x$ .

$\delta(z) < 1$  car la pression diminue lorsque l'altitude augmente, donc  $\psi(x) < 1$ .

Comme  $\beta = 1$ , on obtient  $2x^{3\gamma_{\text{He}}} - x < 1$ , soit  $x^{3\gamma_{\text{He}}} < \frac{x+1}{2}$ .

Étant donné que  $3\gamma_{\text{He}} > 1$ , nécessairement  $x < 1$ , donc  $[R_1 < R]$

17. A 3 km,  $\delta = \psi = 0,68$  et  $x = 0,96$ , soit  $R = 2,1 \text{ m}$ .

A 9 km,  $\delta = \psi = 0,28$  et  $x = 0,90$ , soit  $R = 2,2 \text{ m}$ .

A 15 km,  $\delta = \psi = 0,10$  et  $x = 0,865$ , soit  $R = 2,3 \text{ m}$ .

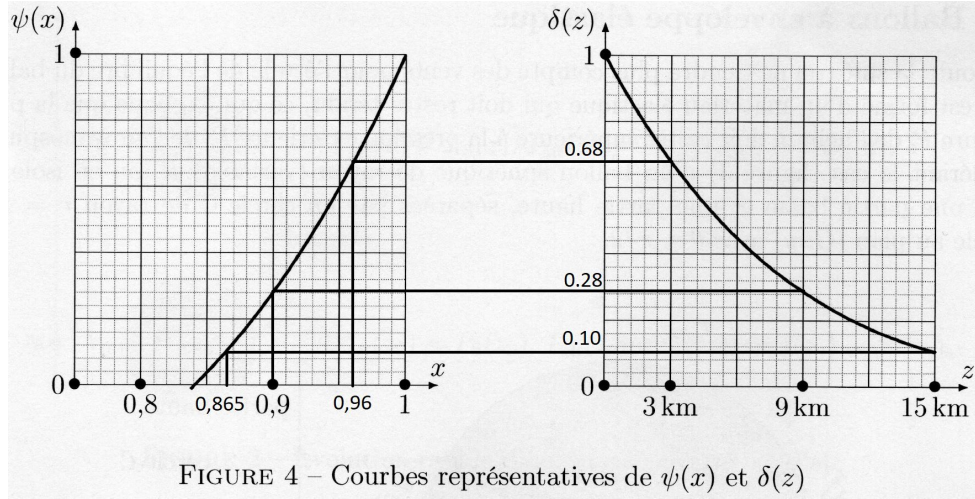


FIGURE 4 – Courbes représentatives de  $\psi(x)$  et  $\delta(z)$

18. Comme  $C$  est très faible devant  $A$  et  $B$ , on négligera le terme lié à  $C$ .

19. On a 
$$G = \frac{\gamma_{el} S}{\ell}$$

D'après la relation d'étalonnage,  $G = G^* \exp(A/B) \times \exp(-T^*/(BT))$ .

On en déduit que  $\gamma_{el} = \frac{\ell}{S} G^* \exp(A/B) \times \exp(-T^*/(BT))$ .

En posant 
$$\mathcal{E} = \frac{k_B T^*}{B} = 0,38 \text{ eV}$$
, on retrouve bien le fait que  $\gamma_{el}$  est proportionnelle à  $\exp(-\mathcal{E}/(k_B T))$ .

20. On applique le PFD à un porteur de charge dans un référentiel galiléen :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ .

En régime permanent,  $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ , donc  $\vec{v} = \frac{\tau q}{m} \vec{E}$ , et le vecteur densité de courant s'écrit  $\vec{j} = \frac{\tau q^2 n_q}{m} \vec{E}$ .

D'après la loi d'Ohm locale, on obtient 
$$\gamma_{el} = \frac{\tau q^2 n_q}{m}$$

21. D'après la statistique de Boltzmann, 
$$\frac{n_q}{n_0} = e^{-\mathcal{E}/(k_B T)}$$

$n_q$  étant proportionnel à  $\gamma_{el}$ , d'après la question 19,  $\mathcal{E} = 0,38 \text{ eV}$

22. Pour un point  $M$  quelconque de l'espace,  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  et  $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la répartition de charges, donc  $\vec{E}$  est orienté suivant  $\vec{u}_z$

La répartition de charges est invariante par translation suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , donc  $\vec{E}$  ne dépend que de  $z$ .

Dans le milieu isolant, il n'y a pas de charges, donc d'après l'équation de Maxwell-Gauss,  $\text{div} \vec{E} = 0$ , soit  $\frac{dE}{dz} = 0$ . Le champ est donc bien uniforme dans le milieu isolant.

23. Avec le même raisonnement, on montre que le champ est aussi uniforme au dessus et en dessous du condensateur.

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de section  $S$  à cheval sur l'armature du bas. D'après le théorème de Gauss, on a  $E_+ \cdot 2S = \frac{\sigma_0 S}{\epsilon_0}$ , soit  $\vec{E}_+ = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$  pour le champ créé par l'armature du bas dans l'isolant.

De même, on choisit comme surface de Gauss un cylindre de section  $S$  à cheval sur l'armature du haut. D'après le théorème de Gauss, on a  $E_- \cdot 2S = \frac{-\sigma_0 S}{\epsilon_0}$ , soit  $\vec{E}_- = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$  pour le champ créé par l'armature du haut dans l'isolant.

Par superposition des deux champs créés par les deux armatures dans l'isolant, on obtient finalement

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

24. On a  $U_0 = \int_0^e \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ , d'où 
$$U_0 = \frac{\sigma_0 e}{\epsilon_0}$$

La capacité du condensateur est définie par  $C_0 = \frac{Q}{U_0} = \frac{S\sigma_0}{U_0}$ , d'où 
$$C_0 = \frac{S\epsilon_0}{e}$$

25. Le moment dipolaire électrique total vaut  $n_p S e p_m$

Les charges surfaciques de dépolarisation valent  $\sigma = n_p p_m$

26. A très basse température, toutes les particules peuvent s'aligner sur le champ électrique et  $p_m =$   
A très haute température,  $p_m = 0$  à cause de l'agitation thermique.

La limite entre ces deux comportements est telle que  $p_{H_2O} E = k_B T_c$ , soit  $T_c = \frac{p_{H_2O} E}{k_B}$

27.  $[\alpha] = \frac{[Q].L}{[Q]^2 [F]}$ , donc  $[\alpha] = L^3$ , la polarisabilité a la dimension d'un volume.  
 $[F].L^2 [Q]$

28. Le condensateur ainsi formé a pour charge surfacique  $\sigma_0 - \sigma$ , donc pour capacité

$$C = \frac{(\sigma_0 - \sigma) S}{U_0} = \frac{(\epsilon_0 E - n_p p_m) S}{E e}$$

Comme  $p_m = \alpha \epsilon_0 E$ , on obtient finalement  $C = \frac{(\epsilon_0 - n_p \alpha \epsilon_0) S}{e}$ , soit  $C = (1 - n_p \alpha) C_0$ , et on peut poser

$$\epsilon_r = 1 - n_p \alpha$$

29. On applique le PFD au satellite dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen. Le satellite a un mouvement circulaire et il est uniquement soumis à l'attraction gravitationnelle de la terre. Avec les

coordonnées polaires, on a  $-m(R_T + h) \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{(R_T + h)^2}$ , soit  $\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T}$

Il s'agit de la troisième loi de Képler.

30. D'après la question précédente,  $\frac{T_{GPS}^2}{(R_T + h_{GPS})^3} = \frac{T_{geo}^2}{(R_T + h_{geo})^3}$ .

On en déduit que  $R_T + h_{GPS} = (R_T + h_{geo}) \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$ , soit  $h_{GPS} = (R_T + h_{geo}) \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} - R_T = 20.10^3$  km

31. Comme la vitesse de phase est proche de  $c$ ,  $B \simeq \frac{E}{c}$ , et  $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll E$ , donc on ne prend en compte que la partie électrique de la force de Lorentz.

On applique le PFD à un électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et on obtient  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$ .

En notation complexe,  $m i \omega \vec{v} = -e \vec{E}$ , donc  $\vec{v} = \frac{-e}{m i \omega} \vec{E}$ .

Par définition,  $\vec{j}_e = -n_e e \vec{v}$ , d'où  $\vec{j}_e = \frac{n_e e^2}{m i \omega} \vec{E}$

32. Les ions ayant une masse bien plus élevée que celle des électrons alors qu'ils sont soumis à la même force, leur vitesse est bien plus faible. Leur contribution au courant induit est donc négligeable.

On a  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$ .

Comme le plasma est électriquement neutre, d'après l'équation de Maxwell-Ampère,  $\text{div} \vec{E} = 0$ .

D'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , d'où  $\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$

On en déduit que  $\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$ , et en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \vec{j}_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

On obtient finalement  $\frac{\mu_0 n_e e^2}{m i \omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$ .

En utilisant la notation complexe, on arrive à  $\frac{\mu_0 n_e e^2}{m i \omega} i \omega - \frac{\omega^2}{c^2} = -k^2$ .

On a alors  $k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}$ .

En posant  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}}$ , on arrive bien à  $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$

---

33. Par définition, la vitesse de phase vaut  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ , soit  $v_\varphi = c \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

On a bien  $f_1$  et  $f_2 > f_p$ , donc la vitesse de phase existe.

L'erreur relative commise sur la vitesse de phase vaut  $\frac{v_\varphi - c}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2}} - 1$ .

On obtient  $2,8 \cdot 10^{-5}$  pour  $f_1$  et  $1,5 \cdot 10^{-5}$  pour  $f_2$ .

34. Pour parcourir les 700 km de l'ionosphère, on a un décalage temporel de 70 ns pour  $f_1$  et de 140 ns pour  $f_2$ . On a alors une imprécision sur la distance entre le satellite et le récepteur de l'ordre de 15 m.

35. En combinant le temps de propagation des signaux sur ces deux fréquences, il est possible de calculer  $f_p$  et de pouvoir corriger l'imprécision liée à la traversée de l'ionosphère.