Correction DS n°9

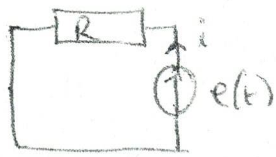
Problème 1 : Plaque à induction (CCINP, TSI, 2024)

1. Flux Φ du champ magnétique à travers la spire (S) :

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B_0\cos(\omega t)\,\vec{u_z}\cdot\pi r_2^2\,\vec{u_z} = \boxed{B_0\pi r_2^2\cos(\omega t)}$$

2. D'après la loi de Faraday, $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ soit $\boxed{e(t) = B_0\pi r_2^2\,\omega\sin(\omega t)}$

3. Électriquement parlant, on néglige l'auto-inductance dans la spire, donc on ne tient compte que de sa résistance R.



D'après la loi des mailles, $e(t) = Ri(t)$

soit $\boxed{i(t) = \dfrac{B_0\pi r_2^2}{R}\,\omega\sin(\omega t)}$

4. Puissance instantanée $P(t)$ dissipée par effet Joule dans la spire :

$$\boxed{P(t) = R\,i^2(t) = \frac{(B_0\pi r_2^2\omega)^2}{R}\sin^2(\omega t)}$$

5. $\boxed{P_{moy} = \langle P(t)\rangle = \dfrac{(B_0\pi r_2^2\omega)^2}{2R}}$, sachant que $\langle \sin^2(\omega t)\rangle$

6. C'est le phénomène de <u>conduction thermique</u> (prog. de 2e année

7. L'intérêt d'une plaque à induction est qu'on chauffe directemen la casserole et non la plaque qui ensuite, par conduction thermi chauffera la casserole. C'est plus rapide, et il y a moins de pertes (une plaque électrique chauffe la casserole, mais aussi le reste au voisinage de la plaque).

Correction DS n° 9

Problème 2 : Couplage par mutuelle inductance (e3a, PSI, 2020)

1. Le flux magnétique créé par un circuit 1, parcouru par un courant i_1, à travers un circuit 2 vaut : $\boxed{\Phi_{1\to 2} = M i_1}$

M est le coefficient de mutuelle inductance et s'exprime en Henry (H).

2. loi des mailles "à gauche" :

$$\boxed{E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}} \quad (1)$$

loi des mailles "à droite" :

$$\boxed{R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0} \quad (2)$$

3. On multiplie (1) par i_1 et (2) par i_2 :

$$E i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} = 0$$

En sommant les 2 expressions :

$$\boxed{E i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)}$$

Par identification, $\boxed{E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$

La puissance fournie par le générateur ($E i_1$) est en partie dissipée par effet Joule dans les résistances R_1 et R_2, et en partie stockée sous forme magnétique dans les bobines.

4. $x = \frac{i_1}{i_2}$

$$E_{mag} = \frac{1}{2} i_2^2 \left(L_2 + 2M \frac{i_1}{i_2} + L_1 \frac{i_1^2}{i_2^2}\right)$$

$$E_{mag}(x) = \frac{1}{2} i_2^2 \left(L_2 + L_1 x^2 + 2 M x\right)$$

soit $\boxed{P(x) = L_2 + 2Mx + L_1 x^2}$

5. $E_{mag} \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq 0$. On calcule le discriminant Δ de $P(x)$:

$$\Delta = 4M^2 - 4L_1L_2 = 4(M^2 - L_1L_2)$$

Si $\Delta \leq 0$, le polynôme gardera un signe ≥ 0.

soit $M^2 \leq L_1L_2 \Rightarrow \boxed{M \leq \sqrt{L_1L_2}}$ on a donc $\boxed{M_{max} = \sqrt{L_1L_2}}$

6. On peut citer :
- les transformateurs (qui augmentent ou abaissent des tensions)
- les moteurs électriques (avec stator et rotor)
- le chauffage par induction

Problème 3 : Thermodynamique du moteur

I - Etude du cycle

1. GP : $\boxed{V_A = \frac{m R T_A}{M_{air}\, p_0}}$ AN : $V_A = 0{,}83\,m^3 = 830\,L$

$\boxed{V_B = \frac{m R T_B}{M_{air}\, p_1}}$ AN : $V_B = 83\,L$

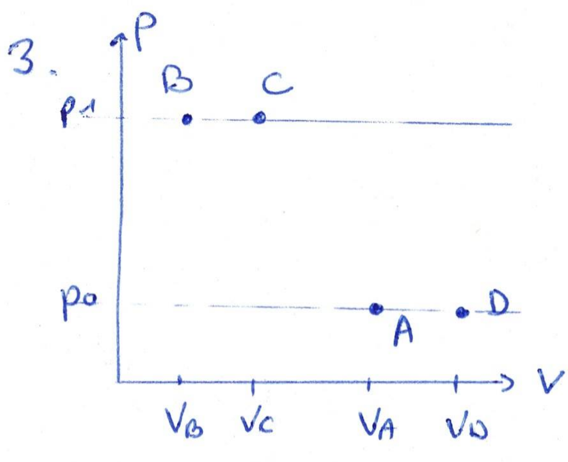
$\boxed{V_C = \frac{m R T_C}{M_{air}\, p_0}}$ AN : $V_C = 270\,L$

2. BC adiabatique réversible d'un gaz parfait : loi de Laplace

$p_C V_C^{\gamma} = p_D V_D^{\gamma} \Rightarrow \boxed{V_D = V_C \left(\frac{p_C}{p_D}\right)^{1/\gamma}}$ AN : $V_D = 1{,}4\,m^3$

De même, $p_C^{1-\gamma} T_C^{\gamma} = p_D^{1-\gamma} T_D^{1-\gamma} \Rightarrow \boxed{T_D = T_{SC} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$ AN : $T_D = 49$

3.



4. $dU = TdS - pdV \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{pdV}{T} \overset{GP}{=} C_v \frac{dT}{T} + mR\frac{dV}{V}$

soit $\boxed{\Delta S = C_v \ln\frac{T_B}{T_A} + mR \ln\frac{V_B}{V_A} = \frac{m}{M} R \ln\frac{V_B}{V_A}}$ $(T_B = T_A)$.

avec $C_v = \frac{mR}{\gamma - 1} = \frac{mR}{M(\gamma-1)}$ AN : $\Delta S = -660\,J.K^{-1}$

II - Production d'entropie sur le cycle

5. BC isobare : $\Delta H_{BC} = Q_{BC} = \boxed{Q_{SC} = \frac{mR\gamma}{M_{air}(\gamma-1)}(\underset{T_{SC}}{\underset{\shortparallel}{T_C}} - \underset{T_{SF}}{\underset{\shortparallel}{T_B}})}$

AN : $Q_{SC} = 660\ kJ$

6. $Q_{SF} = Q_{DA} + Q_{AB} = \Delta H_{DA} + Q_{AB}$

or d'après le 1er principe, $Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB} = \frac{mR}{M_{air}(\gamma-1)}\underbrace{(T_B - T_A)}_{=0} - W_{AB}$

$= -W_{AB}$.

Soit $Q_{SF} = \frac{mR\gamma}{M_{air}(\gamma-1)}(T_A - T_D) - W_{AB}$

or $T_A = T_{SF}$ et $T_D = T_{SC}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ $\Rightarrow \boxed{Q_{SF} = \frac{mR\gamma}{M_{air}(\gamma-1)}\left(T_{SF} - T_{SC}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) - W_{AB}}$

7. Second principe sur un cycle : $\underset{(cycle)}{\Delta S} = 0 = \frac{Q_{SF}}{T_{SF}} + \frac{Q_{SC}}{T_{SC}} + \underset{\geq 0}{S^c}$

Soit $\boxed{S^c = \frac{mR\gamma}{M_{air}(\gamma-1)}\left(\frac{T_{SC}}{T_{SF}}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \frac{T_{SF}}{T_{SC}} - 2\right) + \frac{W_{AB}}{T_{SF}}}$

8. Tout étant fixé sauf W_{AB}, c'est W_{AB} qui fait varier S^c.
Pour minimiser S^c, il faut donc minimiser W_{AB}.

III - Etude de la transformation AB.

9. a) Transformation adiabatique réversible d'un GP ; loi de Laplace.

$p_1 V_{\alpha 1}^{\gamma} = p_0 V_A^{\gamma}$ $\Rightarrow \boxed{V_{\alpha 1} = V_A\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/\gamma}}$ AN : $V_{\alpha 1} = 160\ L$

De même, $\boxed{T_{\alpha 1} = T_{SF}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$ AN : $T_{\alpha 1} = 560\ K$

b) 1er principe sur le fluide : $\Delta U_{A \to \alpha 1} = W_{A \to \alpha 1} + \underset{0\ (adiabatique)}{\underset{\shortparallel}{Q_{A \to \alpha 1}}}$

soit $W_{A \to \alpha 1} = \frac{mR}{M_{air}(\gamma-1)}(T_{\alpha 1} - T_{SF}) = \boxed{\frac{mR}{M_{air}(\gamma-1)} T_{SF}\left(1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}$

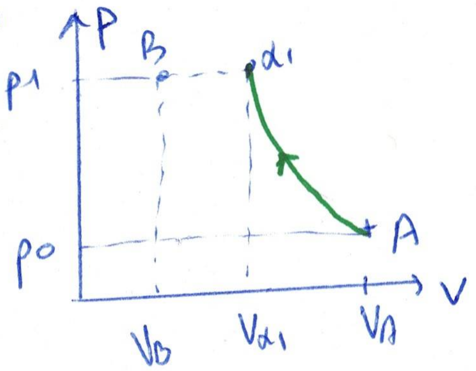
AN : $W_{A \to \alpha 1} = 194\ J$

c) Transformation $\alpha_1 \to B$ monobare : $\boxed{W_{\alpha_1 \to B} = -p_1 (V_B - V_{\alpha_1})}$

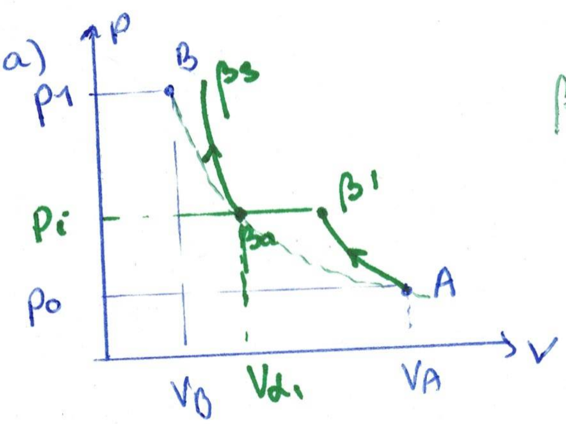
AN : $W_{\alpha_1 \to B} = 77$ kJ

d) $W^{(a)}_{A \to B} = W_{A \to \alpha_1} + W_{\alpha_1 \to B} = \underline{270 \text{ kJ}}$.

e)



10. a)



β_2 est sur l'isotherme TSF reliant A à B.

b) $A \to \beta_1$ et $\beta_2 \to \beta_3$ adiabatiques donc $Q^{(b)}_{A \to B} = \Delta H_{\beta_1 - \beta_2} + \Delta H_{\beta_3 - B}$ (isobares)

$$Q^{(b)}_{AB} = \frac{\gamma m R}{M_{air}(\gamma - 1)} (2 T_{SF} - T_{\beta_1} - T_{\beta_2})$$

avec $T_{\beta_1} = T_{SF} \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_{SF} \left(\frac{p_0}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ loi de Laplace sur $A \to \beta_1$.

$T_{\beta_3} = T_{SF} \left(\frac{\mu p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ " " " $\beta_2 \to \beta_3$

Soit $\boxed{Q^{(b)}_{AB} = \frac{\gamma m R}{M_{air}(\gamma - 1)} T_{SF} \left(2 - \mu^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left(\mu \frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}$

c) 1er principe sur AB : $\underbrace{\Delta U_{AB}}_{\substack{= 0 \\ (T_A = T_B)}} = W^{(b)}_{AB} + Q^{(b)}_{AB} \Rightarrow \boxed{W^{(b)}_{AB} = -Q^{(b)}_{AB}}$

d) Minimiser $W_{AB}^{(b)}$ revient à minimiser la fonction $f : \mu \to \mu^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{\mu p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$$f'(\mu) = \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\mu^{-1/\gamma} + \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \mu^{\frac{1}{\gamma}-2}$$

$$f'(\mu) = 0 \quad \text{ssi} \quad \mu^{-1/\gamma} - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \mu^{\frac{1}{\gamma}-2} = 0$$

$$\text{ssi} \quad \mu^{\frac{2}{\gamma}-2} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Leftrightarrow \boxed{\mu = \sqrt{\frac{p_1}{p_0}}} = \mu^* \simeq 3{,}2$$

μ		μ^*	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

e) $W^{(b)}_{A\to B}(\mu = \mu^*)$: $\boxed{W_{AB}^{(b)} = -\frac{\gamma m R}{M_{air}(\gamma-1)} T_{SF} \left(2 - 2\mu^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$

AN : $W^{(b)}_{A\to B} = 230\ \text{kJ}$ $< W_{AB}^{(a)}$

L'entropie créée est plus faible avec la compression étagée. Le rendement du moteur est meilleur.

II. a) Tous les points en fin de refroidissement, seront sur la même isotherme T_{SF}. La courbe parcourue dans le diagramme de Watt est donc au-dessus de l'isotherme T_{SF} $\Rightarrow$ aire minimale sous l'isotherme T_{SF} donc un travail minimal aussi,

b) $$W_{AB}^{lim} = -\int_{V_A}^{V_B} p\,dV = -\frac{m R T_{SF}}{M_{air}} \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = \boxed{-\frac{m R T_{SF}}{M_{air}} \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

AN : $W_{AB}^{lim} = 190\ \text{kJ}$

c) $$\rho = 1 + \frac{Q_{SF}}{Q_{SC}}$$

$$= 1 + \frac{T_{SF} - T_{SC}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{T_{SC} - T_{SF}} - \frac{T_{SF}}{T_{SC} - T_{SF}} \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Soit $\boxed{\rho = 1 - \frac{1}{T_{SC} - T_{SF}} \left[T_{SC}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + T_{SF}\left(-1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{p_1}{p_0}\right)\right]} = 0{,}40$