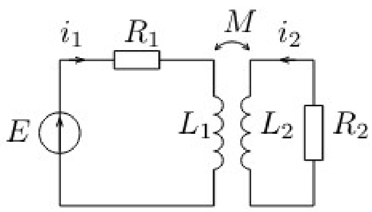
DS 9 – Physique – 3h – Calculatrice autorisée

Consignes impératives :
- Les réponses devront être justifiées.
- Les questions NON NUMÉROTÉES, dont les résultats ne sont pas HOMOGÈNES, les expressions littérales pas ENCADRÉES, les applications numériques pas SOULIGNÉES, NE SERONT PAS CORRIGÉES.
- L'exercice 1 DOIT ÊTRE ABORDÉ en premier, SUR UNE FEUILLE SÉPARÉE, il sera ramassé en premier au bout de 30-45 minutes.

Problème 1 : *Modélisation du couplage par inductance mutuelle*

On propose dans cet exercice, une modélisation du couplage magnétique. Le couplage est quantifié par l'inductance mutuelle M entre les deux bobines, d'inductances propres respectives L_1 et L_2 (voir figure ci-dessous).



1. Rappeler la définition de M, ainsi que sa dimension.

2. En appliquant la loi des mailles dans chacun des deux circuits, établir le système d'équations électriques couplées vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

3. Montrer que ce système d'équations conduit au bilan de puissance $Ei_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{dE_{mag}}{dt}$ avec E_{mag} une quantité à exprimer en fonction de L_1, L_2, M, i_1 et i_2. Interpréter ce bilan.

4. On pose la variable adimensionnée $x = i_1/i_2$. Mettre E_{mag} sous la forme $E_{mag} = \frac{1}{2} i_2^2 P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme d'ordre 2 que l'on explicitera.

5. En admettant que E_{mag} est une quantité positive, montrer que l'inductance mutuelle vérifie une inégalité de la forme $M \leq M_{max}$. Exprimer son majorant M_{max} en fonction de L_1 et L_2.

6. Connaissez-vous d'autres applications de tels circuits couplés par mutuelle induction dans les domaines de l'industrie et de la vie courante ? Citer deux exemples minimum.

Problème n°2 : *Plaque à induction*

Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés " courants de Foucault ", génèrent de l'énergie thermique par effet Joule.
Nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.

Figure 1 - Plaque à induction

Source : La physique par les objets quotidiens – Cédric Ray et Jean-Claude Poizat

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon r_1 permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0\cos(\omega t)$ et de fréquence $f = 60$ kHz.
On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$.
Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la figure 2.

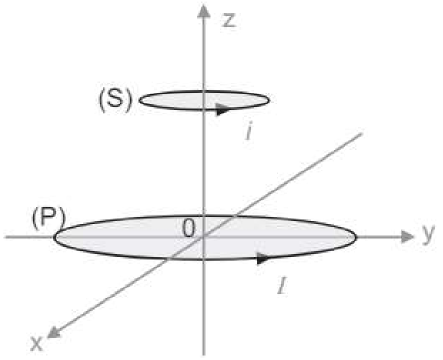


Figure 2 - Représentation de la bobine (P) et de la spire (S)

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance z_0 de la bobine ;
- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par : $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$ où B_0 est une constante ;
- la spire (S) a une résistance électrique R et son inductance propre est négligée.

1. Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique qui traverse la spire (S).
2. En déduire l'expression de la force électromotrice induite e apparaissant dans la spire (S).
3. Déterminer l'expression du courant induit $i(t)$ dans la spire.

4. Déterminer l'expression de la puissance instantanée $P(t)$ dissipée par effet Joule dans la spire (S).

5. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que la puissance moyenne P_{moy} dissipée par effet Joule dans la spire (S) est égale à : $P_{moy} = \dfrac{\left(\omega B_0 \pi r_2^2\right)^2}{2R}$

6. Par quel phénomène physique l'énergie thermique transmise au fond de la casserole par effet Joule est-elle transmise au contenu de la casserole ?

7. Citer un intérêt d'une plaque à induction par rapport à une plaque de cuisson électrique fonctionnant à l'aide d'une résistance électrique.

Problème 3 : *Moteur à air : minimisation d'entropie créée par compression étagée*

On étudie dans ce problème le cycle thermodynamique d'une machine motrice ditherme qui fonctionne au contact de deux thermostats (sources de chaleur dont la température reste constante) dont les températures sont respectivement notées T_{SF} pour le thermostat le plus froid (noté SF) et T_{SC} pour le thermostat le plus chaud (noté SC). Le système que l'on considère au cours du cycle est une masse m de 1,0 kg d'air assimilable à un gaz parfait dont le rapport de capacité thermique est noté γ.

On note W la quantité d'énergie échangée sous forme de travail avec le milieu extérieur par le système au cours d'un cycle. Q_{SF} et Q_{SC} sont respectivement les transfert thermiques échangés par le système avec SF et SC au cours d'un cycle. W, Q_{SF} et Q_{SC} sont comptabilisés reçus par le système.

Données :

- Rapport de capacités thermiques de l'air : $\gamma = 1,4$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,32$ J.K^{-1}.mol^{-1}
- Masse molaire de l'air : $M_{air} = 29$ g.mol^{-1}
- Température de la source froide : $T_{SF} = 290$ K
- Température de la source chaude : $T_{SC} = 950$ K
- Pression basse : $p_0 = 1,0.10^5$ Pa
- Pression haute : $p_1 = 1,0.10^6$ Pa

Partie 1 : Préliminaires

I. Généralités sur les moteurs

1. Pour un moteur ditherme, donner les signes de W, Q_{SC} et justifier celui de Q_{SF}.
2. Définir le rendement thermodynamique ρ d'un moteur ditherme.
3. À partir des principes de la thermodynamique sur le cycle, montrer que le rendement maximal du moteur est obtenu pour un fonctionnement réversible. Donner son expression.

II. Gaz parfait avec γ constant

a) Rappeler la relation de Mayer pour un gaz parfait qui relie les capacités thermiques molaires

à volume et pression constants (CV,m et Cp,m) et la constante R.

b) Établir, pour une masse m de gaz parfait, la variation d'énergie interne ΔU ainsi que la

variation d'enthalpie ΔH, entre deux états d'équilibre quelconques, en fonction de m, R,

Mair, γ et ΔT (variation de température entre les deux états).

Partie 2 : Thermodynamique du moteur

La masse d'air $m = 1,0$ kg subit, dans le moteur, la succession de transformations suivante :

- Une transformation d'un état d'équilibre noté A à un état d'équilibre noté B, qui fait passer la pression d'une valeur basse notée p_0 à une valeur haute notée p_1. Les températures et les volumes dans l'état A et dans l'état B sont respectivement ($T_A = T_{SF}$, V_A), et ($T_B = T_{SF}$, V_B)

Cette transformation fera l'objet d'une étude spécifique et à ce stade rien n'est dit sur sa nature ni sa réalisation. On note simplement que le gaz dans l'état B est en équilibre thermique avec le thermostat SF et qu'il n'y a pas, au cours de cette transformation, d'échange d'énergie thermique avec le thermostat SC. On note $W_{A\to B}$ le travail reçu par le système au cours de la transformation A → B.

- Un échauffement monobare au contact du thermostat SC, de l'état d'équilibre B à l'état d'équilibre C. La température, le volume et la pression de l'état C sont respectivement $T_C = T_{SC}$, V_C et $p_C = p_1$.

- Une détente adiabatique réversible qui fait passer le gaz de l'état d'équilibre C à l'état d'équilibre D. La température, le volume et la pression de l'état D sont respectivement T_D, V_D et $p_D = p_0$

- De l'état d'équilibre D, un refroidissement monobare au contact du thermostat SF ramène le système à l'état initial d'équilibre A.

I. Étude du cycle

1. Exprimer littéralement puis calculer numériquement les volumes V_A, V_B et V_C.
2. Exprimer littéralement puis calculer numériquement la température T_D et le volume V_D.
3. Positionner qualitativement les points d'équilibre A, B C et D dans un diagramme de Watt (p, V).
4. On rappelle l'identité thermodynamique, reliant l'énergie interne U d'un système à son entropie S, et les paramètres d'état du système (sa pression p, sa température T et son volume V) :

$$dU = TdS - pdV$$

En déduire l'expression littérale de la variation d'entropie du système ΔS_{AB} entre les états d'équilibre A et B. Calculer sa valeur numérique.

II. Production d'entropie sur le cycle

5. Les transferts thermiques avec SC ne s'effectuent au cours du cycle que sur la transformation B → C. Exprimer littéralement puis calculer numériquement Q_{SC}.
6. Les transferts thermiques avec SF s'effectuent au cours du cycle sur la transformation D → A et sur la transformation A → B. Exprimer littéralement Q_{SF} en fonction de T_{SF}, de T_{SC}, de $W_{A\to B}$ et des constantes du problème.
7. À partir de l'écriture du deuxième principe sur le cycle, déduire des questions précédentes une expression de l'entropie créée sur le cycle, S^c, en fonction de T_{SF} , T_{SC}, de $W_{A\to B}$ et des constantes du problème.
8. En déduire que la diminution de l'entropie créée sur ce cycle passe par la minimisation de $W_{A\to B}$.

III. Étude de la transformation A → B

Dans le dispositif réel, le fluide traverse deux éléments technologiques différents qui le font passer de l'état d'équilibre A à l'état d'équilibre B :

- Le premier élément est un système de compression qui permet d'amener le fluide jusqu'à la pression haute p_1.

- Le second élément est une simple canalisation qui permet le transport du fluide sur de longues distances (ceci est lié au fait que dans le système étudié les thermostats sont très éloignés). Au cours de ce transport, le fluide échange de l'énergie sous forme de chaleur avec SF (qui est ici l'atmosphère) et finit par atteindre l'équilibre avec cette source (état d'équilibre B). La transformation que subit le fluide dans la canalisation est supposée monobare.

L'objectif de cette partie du problème est d'étudier plusieurs types de systèmes à compression de façon à comprendre comment on peut minimiser $W_{A\to B}$.

9. Compression simple - Transformation (a)

Dans cette partie, on a un système de compression simple pour lequel l'air pris dans l'état d'équilibre A subit une compression adiabatique que l'on supposera réversible. Le fluide sort du compresseur dans l'état d'équilibre noté α_1 pour lequel $p_{\alpha 1} = p_1$. En sortie de compresseur le fluide pénètre dans la canalisation.

a) Exprimer littéralement puis calculer numériquement la température $T_{\alpha 1}$ et le volume $V_{\alpha 1}$ du système en sortie de compresseur.

b) Exprimer littéralement puis calculer numériquement le travail $W_{A\to\alpha 1}$ reçu par la masse de fluide au cours de la transformation $A \to \alpha_1$.

c) Exprimer littéralement puis calculer numériquement le travail $W_{\alpha 1\to B}$ reçu par la masse de fluide dans la canalisation au cours de la transformation $\alpha 1 \to B$.

d) On note $W^{(a)}_{A\to B} = W_{A\to\alpha 1} + W_{\alpha 1\to B}$. Calculer sa valeur numérique.

e) Positionner qualitativement les points d'équilibre A, α_1 et B dans un diagramme de Watt (p, V). Donner sur le même diagramme, l'allure de la transformation adiabatique.

10. Compression double - Transformation (b)

On étudie dans cette partie un compresseur double étage :

- À partir de l'état d'équilibre A, le gaz est d'abord comprimé de façon adiabatique et réversible jusqu'à la pression $p_i = \mu p_0$, dans lequel μ est un nombre compris entre 1 et p_1/p_0. L'état d'équilibre atteint par le gaz à ce moment-là est noté β_1, la température et le volume sont respectivement notés $T_{\beta 1}$ et $V_{\beta 1}$.

- À partir de l'état β_1, le fluide est mis en contact avec SF au travers d'un échangeur dans lequel il subit une transformation monobare. Il sort de l'échangeur dans l'état d'équilibre β_2 tel que la pression et la température sont respectivement $p_{\beta 2} = p_i$ et $T_{\beta 2} = T_{SF}$.

- À partir de l'état β_2, le gaz est à nouveau comprimé de façon adiabatique et réversible jusqu'à la pression p_1. L'état d'équilibre atteint par le gaz à ce moment-là est noté β_3, la température et le volume sont respectivement notés $T_{\beta 3}$ et $V_{\beta 3}$.

En sortie du compresseur double étage (état $\beta 3$), le fluide pénètre dans la canalisation.

a) Positionner qualitativement les points d'équilibre $A, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ et B dans un diagramme de Watt (p, V). Donner sur le même diagramme, l'allure des transformations adiabatiques. On représentera également (en pointillés) l'allure de l'isotherme reliant les points A et B.

b) Donner l'expression littérale (en fonction de $T_{SF}, \mu, p_0/p_1, \gamma, m, R$ et M_{air}) du transfert thermique reçu par la masse de gaz au contact de SF, au cours de la succession de transformations qui mène de l'état A à l'état B, dans ce nouveau dispositif. On le notera $Q^{(b)}_{A\to B}$. On donnera pour cela les expressions de la température $T_{\beta 1}$ en fonction de T_{SF}, μ et γ, ainsi que de la température $T_{\beta 3}$ en fonction de T_{SF} , μ, p_0/p_1 et γ.

c) Déduire des questions précédentes l'expression du travail reçu par la masse de gaz au cours de la succession de transformations qui mène de l'état A à l'état B dans ce nouveau dispositif. On la notera $W^{(b)}_{A\to B}$.

d) Montrer qu'il existe une valeur de μ qui minimise la valeur de $W^{(b)}_{A\to B}$. Exprimer littéralement puis calculer numériquement cette valeur, que l'on notera $\mu*$.

e) Calculer numériquement $W^{(b)}_{A\to B}$ dans le cas où $\mu = \mu*$. Commenter.

11. Compression multiple

a) Expliquer qualitativement pourquoi, en augmentant le nombre de compressions intermédiaires, on ne pourra jamais descendre en dessous d'une valeur limite $W_{limA\to B}$ pour $W_{A\to B}$.

b) Exprimer littéralement puis calculer numériquement $W_{limA\to B}$.

c) Donner l'expression littérale puis calculer numériquement le rendement thermodynamique ρ du moteur dans le cas où $W_{A\to B} = W_{limA\to B}$.

***** Fin de l'épreuve *****