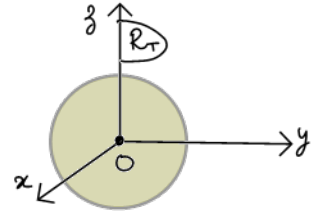


Partie I - Etude du mv't d'un satellite ~ 50'

I.1 -

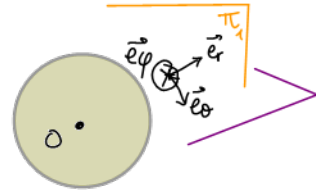
Q1 - * Réf. géocentrique : } centre au centre de masse de la Terre
 } axes dirigés vers 3 étoiles fixes -



* Un référentiel est dit "galiléen" si le mouvement d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé, repéré dans ce référentiel, est une translation rectiligne et uniforme -

Q2 - * Symétries de la distribution de masse \mathcal{D} qui constitue la Terre:

$\pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
 $\pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ } plans de sym. de \mathcal{D} donc de $\vec{g} \Rightarrow \vec{g} \in \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \vec{g} = g(M)\vec{e}_r$



* Invariances de \mathcal{D} : par rotation d'angles θ et φ autour de $O \Rightarrow \|\vec{g}\|$ ne dépend que de r

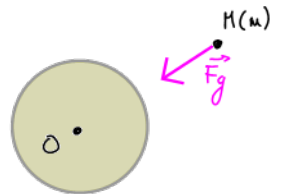
$\vec{g}(M) = g(r)\vec{e}_r$

* Th de Gauss gravitationnel : $\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

surface de Gauss choisie = sphère centrée en O , passant par M , avec ici M extérieur à la Terre

$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_T \Rightarrow \vec{g}(r) = -\frac{G M_T}{r^2} \vec{u}$ ($r > R_T$) ($\vec{u} = \vec{e}_r$)

* Force de gravitation ressentie par le mobile de masse m : $\vec{F}_g = m \vec{g}(r) = -\frac{G m M_T}{r^2} \vec{u}$



Q3 - TMC appliqué au mobile (m) dans R_T : $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{L}_O(\vec{F}_g)$ seule force subie par M

$= \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$ car $\vec{O}\vec{M}$ et \vec{F}_g colinéaires

$\vec{L}_O(M) = \text{cste} = \vec{O}\vec{M} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \forall t, (\vec{O}\vec{M}, \vec{v}) \in \text{plan } \perp \vec{L}_O$ (plan qui reste toujours le même)

\Rightarrow le mouvement de M reste contenu dans ce plan

Q4 - On cherche E_p t.q. $\vec{F}_g = -\text{grad}(E_p) \Leftrightarrow -\frac{G m M_T}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r \Leftrightarrow E_p(r) = -\frac{G m M_T}{r} (+\text{cste})$

prise nulle pour que $E_p \rightarrow 0$ $r \rightarrow +\infty$

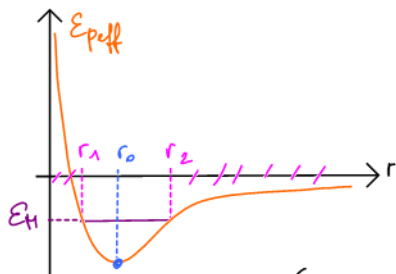
Q5 - La seule force (\vec{F}_g) subie par M étant conservative, d'après le TEM, on a $E_M = \text{cste}$

$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M_T}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{G m M_T}{r}$

Or $\vec{L}_O(M) = \vec{O}\vec{M} \wedge m\vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{cste} \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \frac{\vec{L}_O}{m} \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\vec{L}_O^2}{2mr^2}}_{E_{p,eff}(r)} - \frac{G m M_T}{r}$

Q6 - $E_M = \text{cste} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}$ où $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0 \Rightarrow E_M \geq E_{p,eff}$ forcément

Q7-



En d'un état lié telle que la trajectoire reste bornée

donc $E_H < 0$ forcément (sinon on peut avoir $r \rightarrow +\infty$)

Ici $r > r_2$ et $r < r_1$ interdits (car $E_{eff} > E_H$).

Q8 - * Pour un mvf elliptique (associé à un état lié), on a $E_H = E_{eff}$ aux positions extrêmes (la \odot proche : périhélie, et la \odot lointaine : aphélie) de la trajectoire.

* Quand on a $E_H = \min(E_{eff}) = E_{eff}(r_0)$ on a alors forcément $r = r_0$ (vt): mvf circulaire


Q9 - Sur l'orbite altimétrique de référence (circulaire de rayon R):

d'après le PFD appliqué au satellite (m) dans RT: $m\vec{a} = \vec{F}_g \Rightarrow -m\frac{v^2}{R} = -\frac{GMm}{R^2}$ (selon \vec{e}_r)

$$\Rightarrow v_{alt} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

$$\text{D'où } E_{H,alt} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Q10 - la période de révolution du satellite est alors: $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM_T}} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ 3^e loi de Kepler

Q11.  Je pense que cette question n'est pas dans l'esprit du programme, car l'énoncé ne précise pas que l'expression reliant E_H et R obtenue à Q9 n'est valable dans le cas d'une orbite elliptique, en remplaçant 2R par 2a (grand-axe de l'ellipse)

* En admettant cela, $E_{H,tra} = -\frac{GMm}{2a}$ où $2a = R + R_c$

* Sinon, on peut utiliser les 2 positions particulières auxquelles $\dot{r} = 0$: en $r = R$ et $r = R_c$

$$\hookrightarrow E_{H,tra} = 0 + \frac{\dot{a}_0^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} \Rightarrow \frac{\dot{a}_0^2}{2m} = R^2 \left[E_{H,tra} + \frac{GMm}{R} \right]$$

$$\left| E_{H,tra} = 0 + \frac{\dot{a}_0^2}{2mR_c^2} - \frac{GMm}{R_c} = \frac{R^2}{R_c^2} \left[E_{H,tra} + \frac{GMm}{R} \right] - \frac{GMm}{R_c} \Rightarrow E_{H,tra} \left[1 - \frac{R^2}{R_c^2} \right] = \frac{GMm}{R_c^2} [R - R_c] \right.$$

$$\Rightarrow E_{H,tra} = -\frac{GMm}{R+R_c}$$

Q12 - $\Delta E_H = E_{H,tra} - E_{H,alt} = -GMm \left[\frac{1}{R+R_c} - \frac{1}{2R} \right] = -GMm \frac{R-R_c}{2R(R+R_c)} < 0$ car $R > R_c \Rightarrow$ il faut que $E_H \downarrow$

donc, comme au lieu A de ce chgt d'orbite, $E_p = E_p(R)$ reste la même, on a: $\Delta E_H = \Delta E_c < 0$

\Rightarrow il faut donc que $v_{A,tra} < v_{A,alt}$ donc il faut freiner le satellite.

Q13 - De même en P: $\Delta E'_H = E_{H,cim} - E_{H,tra} = -GMm \left[\frac{1}{2R_c} - \frac{1}{R+R_c} \right] = -GMm \frac{R-R_c}{2R_c(R+R_c)} < 0$ idem

donc par le même raisonnement qu'à Q12, on prévoit que $\Delta E'_c < 0$

\Rightarrow là encore, en P, il faut freiner le satellite pour le faire passer de l'orbite de transfert à l'orbite cimetièr.

Partie II - Mesure du niveau des océans $2^h 10'$

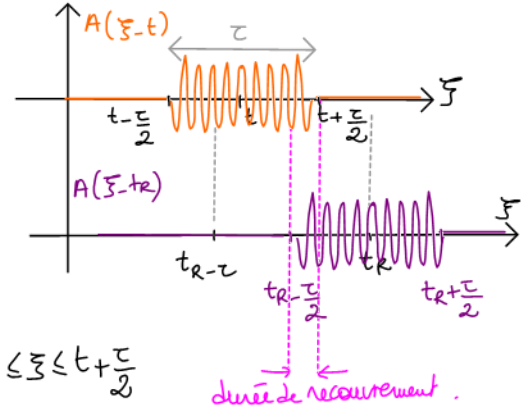
II.1. 40'

Q14. Avec $\underline{e}(t) = A(t) e^{i2\pi f_0 t}$ et $\underline{u}(t) = \alpha A(t-t_R) e^{i2\pi f_0 (t-t_R)}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \underline{s}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi-t) e^{-i2\pi f_0 (\xi-t)} \cdot \alpha A(\xi-t_R) e^{i2\pi f_0 (\xi-t_R)} d\xi \\ &= \alpha e^{i2\pi f_0 (t-t_R)} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi-t) \cdot A(\xi-t_R) d\xi \quad (\text{comme proposé}) \end{aligned}$$

Q15. * $A(\xi-t) = \begin{cases} A_0 \text{ pour } -\frac{\tau}{2} \leq \xi-t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ c'ad $t-\frac{\tau}{2} \leq \xi \leq t+\frac{\tau}{2}$

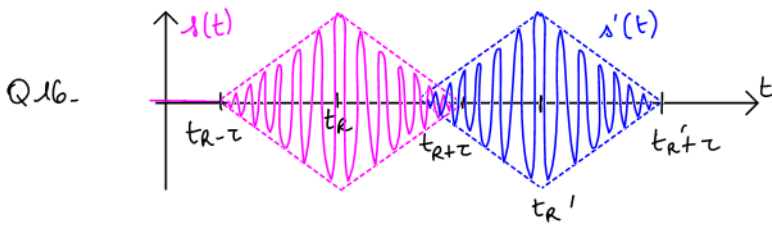
* $A(\xi-t_R) = \begin{cases} A_0 \text{ pour } -\frac{\tau}{2} \leq \xi-t_R \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ c'ad $t_R-\frac{\tau}{2} \leq \xi \leq t_R+\frac{\tau}{2}$



* On constate donc que $A(\xi-t) \cdot A(\xi-t_R) \neq 0$ uniquement pour $t_R-\frac{\tau}{2} \leq \xi \leq t+\frac{\tau}{2}$

$$\Rightarrow \underline{s}(t) = \alpha \exp(i2\pi f_0 (t-t_R)) \cdot A_0^2 \cdot \left[t+\frac{\tau}{2} - (t_R-\frac{\tau}{2}) \right]$$

$$\underline{s}(t) = \alpha \cdot A_0^2 \cdot [t-t_R+\tau] \exp(i2\pi f_0 (t-t_R))$$



Q17. Il faut $t_{R'} - t_R > \tau$ ou $t_R = \frac{2d}{c}$ et $t_{R'} = \frac{2d'}{c} \Rightarrow$ il faut : $\frac{2}{c} [d' - d] > \tau \Leftrightarrow d' - d > \Delta d_{\min} = \frac{c\tau}{2}$

AN: $\Delta d_{\min} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ m}$ soit 15 km ... ce qui n'est pas précis du tout!

Q18. $e(t) = A_0 \cos(2\pi(f_0 t + \frac{K}{2} t^2))$ (pour $t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$) $\Rightarrow f_e(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi}{dt} = f_0 + Kt$ variation affine

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{\min} = f_e(t = -\frac{\tau}{2}) = f_0 - K\frac{\tau}{2} \\ f_{\max} = f_e(t = +\frac{\tau}{2}) = f_0 + K\frac{\tau}{2} \end{cases} \Rightarrow f_c = \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2} = f_0 \quad \text{et} \quad B = f_{\max} - f_{\min} = K\tau$$

Q19. 1^{ère} annulation de $\text{sinc}(x)$: pour $x = \pi$ donc ici pour $\pi K\tau(t_1 - t_R) = \pi \Leftrightarrow t_1 - t_R = \frac{1}{K\tau} = \frac{1}{B}$

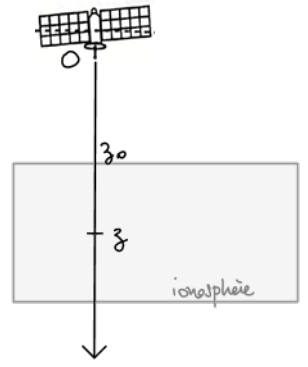
Donc on distinguera les 2 signaux si $t_{R'} - t_R \geq \frac{1}{B} \Leftrightarrow \frac{2}{c} [d' - d] \geq \frac{1}{B} \Leftrightarrow d' - d \geq \Delta d_{\min} = \frac{c}{2B}$

AN avec $B = 320 \cdot 10^6 \text{ Hz} \Rightarrow \Delta d_{\min} = 0,47 \text{ m}$ soit 47 cm : beaucoup plus précis!

(et on n'est pas limité par la précision centimétrique sur h , pour déterminer l'océan).

II.2. 130

Q20. $\vec{E}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - k(z-z_0))} \vec{e}_x$
 propagation selon \vec{e}_z polarisation rectiligne, selon \vec{e}_x



Q21. $\begin{cases} \vec{F}_{Lmag} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{F}_{Leel} = q \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \frac{\|\vec{F}_{Lmag}\|_{max}}{\|\vec{F}_{Leel}\|} = \frac{vB}{E} \ll 1 \Leftrightarrow v \ll \frac{E}{B} \approx c$

donc la force de Lorentz magnétique est négligeable devant l'électrique tant que les particules restent non relativistes

Q22. * PFD à un e- dans R+ galiléen: $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{E}$ (seule force non négligeable)

↳ en régime sinusoïdal forcé: $\vec{v}_e = \vec{v}_{e0} e^{i\omega t} \vec{e}_x \Rightarrow$ selon \vec{e}_x : $i\omega m_e \vec{v}_e = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{v}_e = -\frac{e}{i\omega m_e} \vec{E}$

* De même à un cation: $m_c \frac{d\vec{v}_c}{dt} = +e \vec{E} \Rightarrow \vec{v}_c = +\frac{e}{i\omega m_c} \vec{E}$

Q23. La densité volumique de courant est donc: $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_e + n.e.\vec{v}_c$

Or $\frac{\|\vec{v}_c\|}{\|\vec{v}_e\|} = \frac{m_e}{m_c} \ll 1 \Rightarrow \vec{j} \approx -ne\vec{v}_e = \frac{ne^2}{i\omega m_e} \vec{E}$ soit $\chi = -i \frac{ne^2}{\omega m_e}$

Donc on a bien $\chi = -i \varepsilon \frac{\omega_p^2}{\omega} \Leftrightarrow \varepsilon \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e} \Leftrightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon m_e}}$ pulsat plasma.

Q24. On doit respecter l'équation de conservation locale de la charge: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Or le champ électrique doit vérifier l'équat de Maxwell-Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \text{div } \vec{j} = \chi \text{div } \vec{E} = \chi \frac{\rho}{\varepsilon}$

↳ $\frac{\chi}{\varepsilon} \rho + i\omega \rho = 0$ et ce $\forall \omega \Rightarrow \rho = 0$

Cela est lié au fait que l'OEM reste transverse dans le plasma: $\text{div } \vec{E} = 0$

Q25. M-F: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B})$

↳ $\Delta \vec{E} = \mu_0 \left[\chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right]$ équation de propagation du champ \vec{E}
 $\mu_0 \vec{j} + \varepsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En injectant la forme de \vec{E} : $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} = \mu_0 \left[-i\varepsilon \frac{\omega_p^2}{\omega} \cdot i\omega \vec{E} + \varepsilon (-\omega^2) \vec{E} \right] \Rightarrow k^2 = -\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}$

Q26. En prenant $\omega < \omega_p$: $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0 \Rightarrow k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t \mp i \frac{1}{\delta}(z-z_0))} \vec{e}_x$
 $= E_0 e^{\pm \frac{1}{\delta}(z-z_0)} e^{i\omega t} \vec{e}_x$

↳ la solup en $+\frac{1}{\delta}$ dirige en $z \rightarrow +\infty$: c'est impossible ($u_{max} \|\vec{E}\|^2$ doit rester finie)

⇒ on conserve la solution en $k = -i \frac{1}{\delta} = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$ où $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ représente la distance caractéristique d'atténuation de l'onde dans le plasma

On a donc $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z-z_0}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ et $\vec{B} = -\int \text{rot} \vec{E} dt = \frac{E_0}{i\omega\delta} e^{-\frac{z-z_0}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{e}_y$ onde stationnaire évanescente (oscille sur place)

Q27 - $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega \delta} e^{-\frac{2}{\delta}(z-z_0)} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_y \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$
Pas de propagation d'énergie associée à cette onde.

Q28 - Si $\omega > \omega_p$, alors $k = + \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ (on garde + pour une propagat° selon $+\vec{e}_z$)

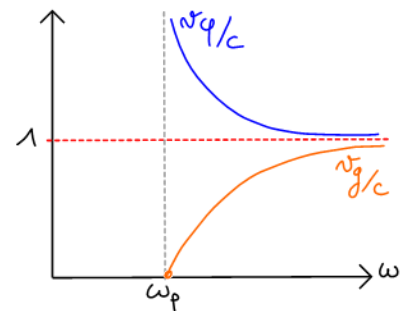
$\hookrightarrow \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k(z-z_0))} \vec{e}_x$ et $\vec{B} = \frac{k \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\omega})^2} e^{i(\omega t - k(z-z_0))} \vec{e}_y$ OPPH
 \Rightarrow dans TR $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - k(z-z_0)) \vec{e}_x$ et $\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\omega})^2} \cos(\omega t - k(z-z_0)) \vec{e}_y$ (avec diffraction)

Q29 - Donc l'onde ne se propage que si $\omega > \omega_p$: la pulsation plasma agit comme une pulsat° de coupure, et le plasma agit donc comme un filtre passe-haut $\omega_c = \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon m_e}}$

Q30 - Pour que $\omega > \omega_p$ de jour comme de nuit, dans toute l'ionosphère, il faut $\omega > \omega_{p,max}$ pour $n = n_{max} \approx 10^{12} m^{-3}$
 \hookrightarrow AN: $\omega_{p,max} \approx \left(\frac{10^{12} \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38}}{8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \right)^{1/2} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $f_{p,max} \approx 10 \text{ MHz}$ ondes radio FM.

Donc les fréquences utilisées par Jason vérifient ce critère, et on pourra faire traverser l'ionosphère à l'onde.

Q31 - $v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\omega})^2}}$ $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2}{2} \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_{\phi}} = c \sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\omega})^2}$



Q32 - v_{ϕ} dépend de ω (et $v_g \neq v_{\phi}$) donc la propagation est dispersive : pour un paquet d'onde, les \neq constituants spectraux ne voyageront pas à la même vitesse donc le paquet d'onde se déformera.

Q33 - Avec $n = 5 \cdot 10^{11} m^{-3}$ $\omega_p \approx 4 \cdot 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$ et $f_p \approx 8 \text{ MHz}$ donc $f_0, f_1 \gg f_p \Rightarrow \frac{\omega_p}{\omega_0}, \frac{\omega_p}{\omega_1} \ll 1$

* Durée du trajet de l'impulsion à f_0 : $t_0 = 2 \frac{l}{v_g(\omega_0)} + 2 \frac{d-l}{c}$ (on utilise v_g car on s'intéresse à la propagation de l'enveloppe de l'impulsion)
 " " " f_1 : $t_1 = 2 \frac{l}{v_g(\omega_1)} + 2 \frac{d-l}{c}$ (ionosphère vide et lame atmosphère)

$\hookrightarrow \Delta t = t_1 - t_0 = 2l \left[\frac{1}{v_g(\omega_1)} - \frac{1}{v_g(\omega_0)} \right] = \frac{2l}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\omega_1})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_p}{\omega_0})^2}} \right] \approx \frac{2l}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \right) \right]$
 $\Delta t \approx \frac{l}{c} \omega_p^2 \left[\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right]$ $\frac{\omega_p}{\omega_0}, \frac{\omega_p}{\omega_1} \ll 1$

Q34. On a donc $t_0 = \frac{2l}{v_g(\omega_0)} + \frac{d-l}{c} \Rightarrow l \frac{c}{v_g(\omega_0)} + (d-l) = \frac{ct_0}{2} \Rightarrow d = \frac{ct_0}{2} + l \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2}} \right]$

$\hookrightarrow d = \frac{ct_0}{2} - \frac{l}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 = \frac{ct_0}{2} - \frac{1}{2} c \Delta t \frac{1/\omega_1^2 - 1/\omega_0^2}{1/\omega_1^2 - 1/\omega_0^2} = \frac{ct_0}{2} - \frac{c \Delta t}{2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 - 1}$ avec $\varepsilon = \frac{c \Delta t}{2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 - 1}$

Q35. Donc l'erreur commise sur la mesure de d correspond à la correction ionosphérique ε :

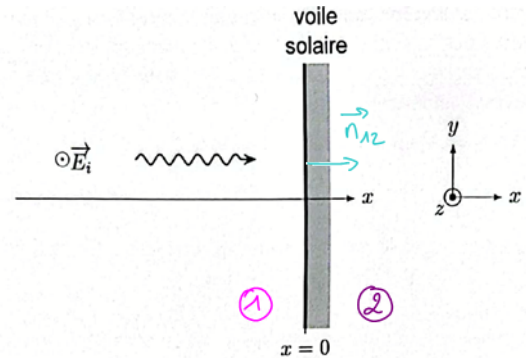
$\varepsilon = \frac{l}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 = \frac{l}{2\omega_1^2} \cdot \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_1^2}$ AN: $\varepsilon \approx \frac{5 \cdot 10^5}{2 \cdot (2\pi \times 13,6 \cdot 10^9)^2} \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38}}{8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 0,05 \text{ m soit } 5 \text{ cm}$

Donc sans cette correction, on commet une erreur non négligeable quand on estime une longueur à 50 cm près environ, comme évalué à Q19 (et on ite encore lors des qps mm, comme mentionné en intro!)

Partie III - Voile solaire 40' sans III.3 - 1h30 avec!

III.1.

Q36. D'après la relation de passage sur \vec{E} : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{n}_{12}$
 (conducteur parfait) $= \vec{E}_i + \vec{E}_r$



D'où en projection sur $\vec{e}_x \Rightarrow \sigma = 0$; sur $\vec{e}_y \Rightarrow \underline{E_{0y}'} = 0$; sur $\vec{e}_z \Rightarrow E_0 + \underline{E_{0z}'} = 0 \Rightarrow \underline{E_{0z}'} = -E_0$
 $\hookrightarrow \vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_z$

Q37. * D'après la relation de structure des OEM dans le vide: $\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = -\frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$
 $\vec{B}_r = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$

$\hookrightarrow \vec{B}_{tot}(x=0^-, t) = -2 \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y$

* D'après la relation de passage sur \vec{B} : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \Rightarrow \vec{j}_s(t) = \frac{2 E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_z$

Q38. Force de Laplace sur la portion (a, dy) : $\delta \vec{F}_L = di a \vec{e}_y \wedge \frac{1}{2} \vec{B}_{tot}(x=0^-, t) = a dy \frac{2 E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \vec{e}_y \wedge -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$
 $= \frac{2 E_0^2}{\mu_0 c^2} a dy \cos^2(\omega t) \vec{e}_x = a \vec{j}_s dy \wedge \vec{B}_i(x=0^-, t)$

$\hookrightarrow \vec{F}_L = \int_0^a \delta \vec{F}_L = 2 \varepsilon_0 E_0^2 a^2 \cos^2(\omega t) \vec{e}_x = a^2 \vec{j}_s \wedge \vec{B}_i(x=0^-)$

Q39. D'où une force surfacique moyenne $\langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{a^2} \langle \vec{F}_L \rangle = \langle 2 \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t) \rangle \vec{e}_x = \varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_x$

Or l'intensité de l'onde incidente est $\underline{I} = \|\langle \vec{\pi} \rangle\| = \left\| \left\langle \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} \right\rangle \right\| = \left\| \left\langle \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t) \vec{e}_x \right\rangle \right\| = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2}$

$\hookrightarrow \langle \vec{j} \rangle = \mathcal{P}_m \vec{e}_x$ où $\mathcal{P}_m = \varepsilon_0 E_0^2 = 2 \underline{I}$

Q40. PFD à la voile solaire $\Rightarrow m \vec{a} = S \cdot \langle \vec{j} \rangle \Rightarrow S = m \frac{10^{-3} g}{2 \underline{I} / c}$ AN: $S \approx 3 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \approx 3 \text{ km}^2 \dots$ c'est beaucoup!!!

III.2.

Q41. Position du vaisseau: $\vec{r} = r\vec{e}_r$; vitesse: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; accélération: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

Q42. BDF au vaisseau: $\vec{F}_{grav} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e}_r$
 $\vec{F}_p = L(r, \theta) \mathcal{P}_m S \cos^2\varphi \vec{n} = L(r, \theta) \mathcal{P}_m S \cos^2\varphi [\cos\alpha\vec{e}_r + \sin\alpha\vec{e}_\theta]$ où $\alpha = \varphi - \theta$


↳ $F_r = -\frac{GmM_T}{r^2} + L(r, \theta) \mathcal{P}_m S \cos^2\varphi \cos(\varphi - \theta)$
 $F_\theta = L(r, \theta) \mathcal{P}_m S \cos^2\varphi \sin(\varphi - \theta)$

Q43. D'après le PFD appliqué au vaisseau dans \mathcal{R}_T on a donc: $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\dot{v}_r - m\frac{v_\theta^2}{r}$
 $F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = m(\dot{r}\dot{\theta} + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta})) = m(\dot{v}_r\frac{v_\theta}{r} + \dot{v}_\theta)$

d'où les expressions proposées: $\dot{v}_r = \frac{F_r}{m} + \frac{v_\theta^2}{r}$ et $\dot{v}_\theta = \frac{F_\theta}{m} - \frac{v_r v_\theta}{r}$

Q44. $E_H = \frac{1}{2}mv^2 + E_p^{grav} = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 - \frac{GmM_T}{r}$

Q45. D'après le TPM, $\frac{dE_H}{dt} = \mathcal{P}$ (autres forces) $\stackrel{ici}{=} \vec{F}_p \cdot \vec{v} = L(r, \theta) \underbrace{\mathcal{P}_m S \cos^2\varphi}_{K_m} [\cos(\varphi - \theta) \cdot v_r + \sin(\varphi - \theta) \cdot v_\theta]$

III.3.  Dans la fonction proposée, les arguments initiaux theta et vtheta changent de nom aux lignes 20 et 21 du programme (où on note alors vth la vitesse orthoradiale) et à la question 49 (où il est mentionné th au lieu de theta).

Q46. $T = np.arange(0, tmax, dt)$

Q47. def recherche_phi_optimal(vr, vth, theta):

```

eps = 2e-3
phi = np.arange(-np.pi/2, np.pi*2, eps)
derEm = Km * np.cos^2(phi) * (vr * np.cos(phi - theta) + vtheta * np.sin(phi - theta))
imax, phimax = 0, 0
for i in range(len(phi)-1):
    if derEm[i+1] > derEm[i]:
        imax = i+1
phimax = phi[imax]
return phimax
    
```

Rq: fonction écrite de façon très "non optimale" comme suggéré par l'énoncé

Q48. def derives_comp_vitesse(r, theta, vr, vth, phi):

if theta < np.arctan(RT/r):

$$L = 0$$

else:

$$L = 1$$

$$vr_{point} = -G * MT / r ** 2 + L * Km * (np.cos(phi)) ** 2 * np.cos(phi - theta) / m + vtheta ** 2 / r$$

$$vtheta_{point} = L * Km * (np.cos(phi)) ** 2 * np.sin(phi - theta) / m - vr * vtheta / r$$

Return vr_point, vtheta_point.

$$F_r = -\frac{GmMT}{r^2} + L(r, \theta) \rho_m S \cos^2 \varphi \cos(\varphi - \theta)$$

$$F_\theta = L(r, \theta) \rho_m S \cos^2 \varphi \sin(\varphi - \theta)$$

$$\dot{v}_r = \frac{F_r}{m} + \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$\text{et } \dot{v}_\theta = \frac{F_\theta}{m} - \frac{v_r v_\theta}{r}$$

Q49. vr += vr_pt * dt

vtheta += vth_pt * dt

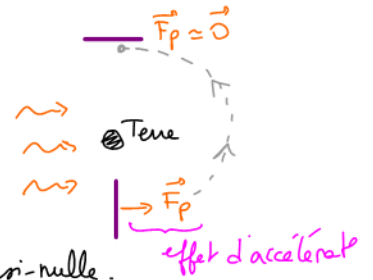
r += vr * dt

theta += vtheta / r * dt

Q50. Si on ne veut pas que l'effet d'accélération dû à \vec{F}_p en $\theta = -\pi/2$

soit contrebalancé par une décélération équivalente en $\theta = +\pi/2$,

il faut que la voile offre alors une surface normale au rayonnement quasi-nulle.



Q51. $E_M = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmMT}{r} = 0$ pour rejoindre une trajectoire non bornée (état de diffusion)

$$\Leftrightarrow v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Q52. $* E_M = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmMT}{r} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_{lib}^2 = \frac{1}{2} m v_{lib}^2 \left[\left(\frac{v}{v_{lib}} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow \frac{v}{v_{lib}} = 1 + \frac{E_M}{\frac{1}{2} m v_{lib}^2} = 1 + \frac{E_M r}{GmMT}$

* des points où $v \uparrow$ correspondent aux passages aux alentours de $\theta = -\pi/2$ (cf. Q50), ou plus largement aux portions du vaisseau tels que $-\pi < \theta < 0$.

A l'inverse, $v \downarrow$ quand $0 < \theta < \pi$, mais moins fortement grâce à l'orientation choisie pour la voile (non perpendiculaire au faisceau).

Donc globalement, la vitesse augmente.