

## Le Blue Fire

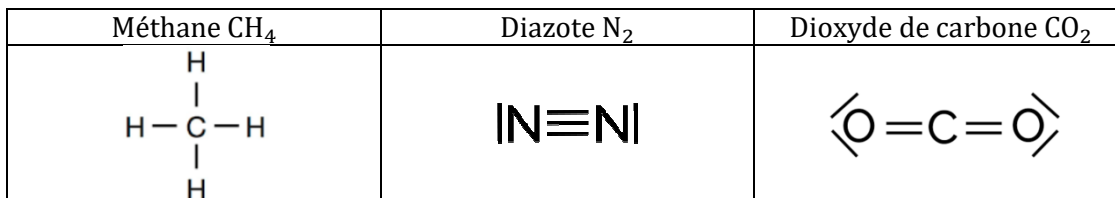
### Partie A – Origines du Blue Fire

#### I – Gaz naturel

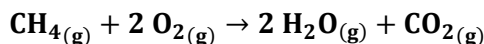
Q1. Représentation de Lewis des atomes H, C, N et O :



On en déduit les formules de Lewis :



Q2. Combustion du méthane :



Q3. Loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = 2 \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) + \Delta_f H^0(\text{CO}_2(\text{g})) - \Delta_f H^0(\text{CH}_4(\text{g})) - 2 \Delta_f H^0(\text{O}_2(\text{g}))$$

$$\Delta_r H^0 = 2 \times (-241,8) + (-393,5) - (-74,6) - 2 \times 0 = -802,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Remarque :  $\Delta_f H^0(\text{O}_2(\text{g})) = 0$  car c'est un élément simple et pur pris dans son état standard de référence.

$\Delta_r H^0 = -802,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < 0$ . C'est une réaction exothermique.

Q4. À température constante de 0°C, soit 273 K, sous pression constante, l'énergie thermique vaut :

$$Q = n \times \Delta_r H^0 = \frac{PV}{RT} \Delta_r H^0$$

Pour 1 m<sup>3</sup> :

$$Q = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 1}{8,314 \times 273} \times (-802,5 \cdot 10^3) = -35,8 \cdot 10^6 \text{ J}$$

L'énergie thermique est cédée au milieu extérieur. On en déduit, toujours pour 1 m<sup>3</sup> en kW · h :

$$\text{PCI} = \left| \frac{Q}{3600} \right| = 9,94 \text{ kW} \cdot \text{h} \cdot \text{m}^{-3}$$

Cette valeur est en accord avec l'encadrement proposé pour le gaz naturel commercial.

Q5. Consommation de  $V_{\text{CH}_4} = 33,9 \cdot 10^9 \text{ m}^3$  de méthane. D'après la réaction de combustion, 1 mole de méthane libère 1 mole de CO<sub>2</sub>. Quantité de méthane initiale  $n_0$  :

$$n_0 = \frac{PV_{\text{CH}_4}}{RT}$$

Masse de dioxyde de carbone formée :

$$m_{\text{CO}_2} = n_0 \times M(\text{CO}_2) = \frac{PV_{\text{CH}_4}}{RT} \times M(\text{CO}_2) = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 33,9 \cdot 10^9}{8,314 \times 273} \times 44 \cdot 10^{-3} = 6,66 \cdot 10^{10} \text{ kg}$$

Sachant que l'empreinte carbone totale de la France correspond à  $644 \cdot 10^9 \text{ kg}$  de CO<sub>2</sub>, la combustion du méthane correspond à :

$$\frac{6,66 \cdot 10^{10}}{644 \cdot 10^9} = 10,3 \% \text{ de cette empreinte}$$

Q6. Méthode de la température de flamme. On va pour cela considérer un chemin fictif : en premier lieu la réaction chimique à  $T_i = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$ , puis l'échauffement du système (produits formés) jusqu'à  $T_f$ .

On suppose la réaction isobare à la pression atmosphérique ( $Q = \Delta H^0$ ) et elle se déroule dans un réacteur adiabatique ( $Q = 0$ ). On a donc  $\Delta H^0 = 0$ , la variation d'enthalpie entre l'état initial et l'état d'équilibre thermodynamique est nulle.

La réaction chimique est supposée totale et dans les proportions stoechiométriques. On a de plus 4 fois plus de diazote que de dioxygène. Soit la composition du système à l'état final :

	$\text{CH}_{4(g)} + 2 \text{O}_{2(g)} \rightarrow 2 \text{H}_2\text{O}_{(g)} + \text{CO}_{2(g)}$				$\text{N}_{2(g)}$
$t = 0$	$n_i$	$2n_i$	0	0	$4 \times 2n_i$
$t_f$	$n_i - \xi_f = 0$	0	$2\xi_f = 2n_i$	$\xi_f = n_i$	$8n_i$

L'énergie libérée par cette réaction est  $\Delta H_1^0 = \xi_f \times \Delta_r H^0 = n_i \times \Delta_r H^0$ .

L'échauffement de la composition du système présent en fin de réaction correspond à :

$$\Delta H_2^0 = \sum_j n_j C_{p,nj} (T_f - T_i) = \left( 2n_i C_{p,n}(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) + n_i C_{p,n}(\text{CO}_{2(g)}) + 8n_i C_{p,n}(\text{N}_{2(g)}) \right) (T_f - T_i)$$

Finalement,

$$\Delta H_1^0 + \Delta H_2^0 = 0 \Leftrightarrow T_f = T_i - \frac{\Delta_r H^0}{2C_{p,n}(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) + C_{p,n}(\text{CO}_{2(g)}) + 8C_{p,n}(\text{N}_{2(g)})}$$

Application numérique :

$$T_f = 293 - \frac{-802,5 \cdot 10^3}{2 \times 37,6 + 45,4 + 8 \times 30,1} = 2513 \text{ K} = \mathbf{2240 \text{ }^\circ\text{C}}$$

## II - Le Power to Gas

**Q7.** Par la loi de Hess, pour la réaction de Sabatier :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{CH}_{4(g)}) + 2 \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) - \Delta_f H^0(\text{CO}_{2(g)}) - 4 \Delta_f H^0(\text{H}_2(g))$$

$$\Delta_r H^0 = -74,6 + 2 \times (-241,8) - (-393,5) = \mathbf{-164,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

La réaction est exothermique dans le sens direct.

$$\Delta_r S^0 = S^0(\text{CH}_{4(g)}) + 2 S^0(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) - S^0(\text{CO}_{2(g)}) - 4 S^0(\text{H}_2(g))$$

$$\Delta_r S^0 = 186,3 + 2 \times 188,8 - 213,8 - 4 \times 130,7 = \mathbf{-172,7 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$

**Q8.** Enthalpie libre standard de la réaction :  $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0$

Lien avec la constante d'équilibre :  $\Delta_r G^0 = -RT \ln(K^0)$

On en déduit :

$$K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta_r H^0}{RT} + \frac{\Delta_r S^0}{R}\right)$$

$$\text{Application numérique : } K^0 = \exp\left(-\frac{-164,7 \cdot 10^3}{8,314 \times (400 + 273)} + \frac{-172,7}{8,314}\right) = \mathbf{5785}$$

On remarque que  $K^0 > 10^3$ . On peut considérer cette réaction comme totale.

**Q9.** La loi de Van't Hoff s'écrit (donnée) :

$$\frac{d \ln(K^0)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} < 0 \text{ car } \Delta_r H^0 < 0$$

On en déduit que  $\ln(K^0)$  est une fonction décroissante de la température  $T$ , et donc  $K^0$  est une fonction décroissante de la température (par propriété du logarithme).

**L'augmentation de température dévalorise donc le rendement de cette réaction.** On pouvait s'y attendre puisque la réaction est exothermique (en accord avec la loi de modération).

Par ailleurs, la réaction est opérée à 400 °C, ce qui demande d'apporter un chauffage supplémentaire alors que la thermodynamique prévoit le contraire pour son optimisation. C'est en réalité **un argument cinétique** : la réaction a besoin d'être réalisée à plus haute température pour démarrer et/ou pour l'accélérer.

**Q10.** Quotient réactionnel ( $n_{\text{tot}}$  désignant la quantité de matière totale en espèces gazeuses et  $a$  l'activité) :

$$Q_r = \frac{a(\text{H}_2\text{O})^2 a(\text{CH}_4)}{a(\text{H}_2)^4 a(\text{CO}_2)} = \frac{\frac{p(\text{H}_2\text{O})^2}{p^{0^2}} \times \frac{p(\text{CH}_4)}{p^0}}{\frac{p(\text{H}_2)^4}{p^{0^4}} \times \frac{p(\text{CO}_2)}{p^0}} = \frac{p(\text{H}_2\text{O})^2 p(\text{CH}_4)}{p(\text{H}_2)^4 p(\text{CO}_2)} p^{0^2} = \frac{n(\text{H}_2\text{O})^2 n(\text{CH}_4)}{n(\text{H}_2)^4 n(\text{CO}_2)} \times \frac{n_{\text{tot}}^2 p^{0^2}}{p^2}$$

**Q11.** Si la pression totale  $p$  augmente, alors le quotient réactionnel  $Q_r$  diminue et  $Q_r < K^0$ . La réaction se déplace donc dans le sens direct pour rejoindre l'équilibre. **Une augmentation de pression favorise le sens direct.**

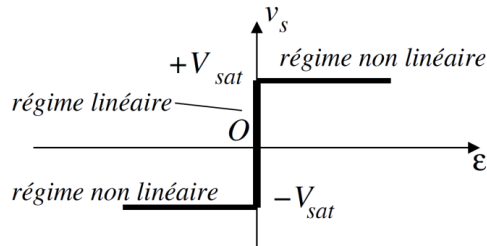
Remarque : c'est également en accord avec la loi de modération de Le Chatelier puisqu'il y a moins de mol gaz du côté des produits que du côté des réactifs.

## Partie B – Avant le départ

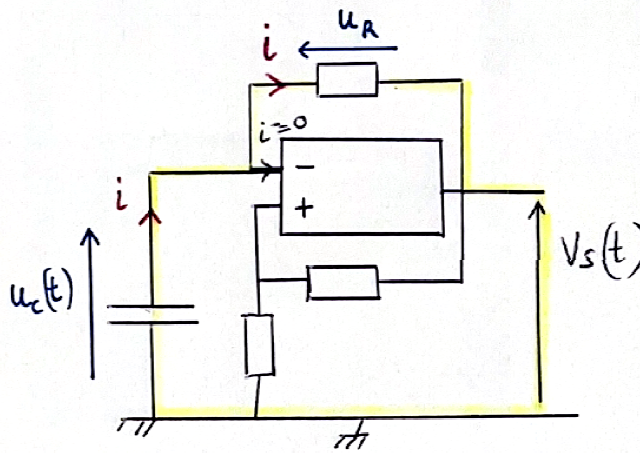
**Q12.** L'ALI idéal de gain infini, comme son nom l'indique, possède un gain statique  $A_0$  considéré infini. En ce sens, puisque  $V_s = A_0 \varepsilon = A_0(V^+ - V^-)$ , on a  $\varepsilon$  qui tend vers 0 et donc  $V^+ = V^-$  en régime linéaire.

Par ailleurs on considère dans le cas « idéal » les courants d'entrée nuls puisque l'impédance d'entrée est considérée infinie. L'impédance de sortie est considérée nulle.

Caractéristique :



**Q13.** On considère que  $i^+ = i^- = 0$  soit  $i_R = i_C = i$ .



La loi des mailles dans la maille en jaune donne :

$$u_c(t) - u_R - V_s(t) = 0 \text{ avec } u_R = Ri(t) \text{ et } i(t) = -C \frac{du_c(t)}{dt} \text{ en convention générateur !}$$

On en déduit :

$$u_c(t) - Ri(t) = V_s(t) \Leftrightarrow u_c(t) + RC \frac{du_c(t)}{dt} = V_s(t) \Leftrightarrow \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{V_s(t)}{RC}$$

Lorsque l'on ferme l'interrupteur,  $V_s(t = 0^+) = +V_{sat}$ , soit l'équation différentielle :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{V_{sat}}{RC} \text{ et on pose } \tau = RC$$

**Q14.** L'ALI fonctionne en régime saturé, soit :

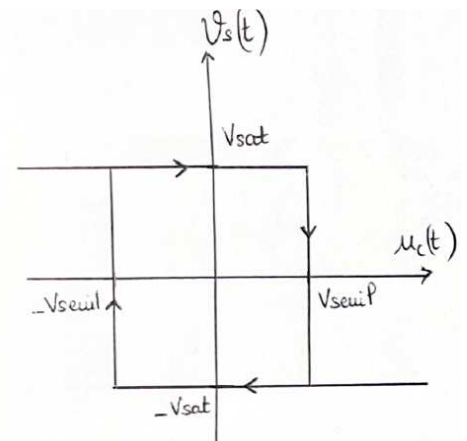
- Pour  $V_s = +V_{sat}$  on a  $V^+ > V^- \Rightarrow \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{sat} > u_c(t)$
- Pour  $V_s = -V_{sat}$  on a  $V^+ < V^- \Rightarrow -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{sat} < u_c(t)$

Qui donne la caractéristique ci-contre, en posant :

$$\pm V_{seuil} = \pm \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{sat}$$

Par ailleurs, la solution l'équation différentielle portant sur  $u_c(t)$  s'écrit :

$$u_c(t) = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + V_{sat}$$



Le condensateur étant initialement déchargé, et la tension à ses bornes étant continue, on a :

$$u_c(t = 0^-) = u_c(t = 0^+) \Rightarrow 0 = k + V_{\text{sat}} \Leftrightarrow k = -V_{\text{sat}}$$

Soit finalement, pour  $0 \leq t \leq t_1$  :

$$u_c(t) = V_{\text{sat}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

On en déduit donc que  $u_c(t)$  est une fonction croissante jusqu'à  $t = t_1$ , lorsque  $u_c(t)$  atteint la valeur  $V_{\text{seuil}}$ , qui correspond au basculement de  $V_s$  à  $-V_{\text{sat}}$ .

$$\begin{aligned} u_c(t_1) &= \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{\text{sat}} = V_{\text{sat}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) \right) \\ \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) &= 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ \Leftrightarrow t_1 &= RC \ln\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

**Q15.** On a à présent  $V_s(t_1) = -V_{\text{sat}}$ . L'équation différentielle devient :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c(t) = -\frac{V_{\text{sat}}}{\tau}$$

La solution est donc :

$$u_c(t) = k' \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - V_{\text{sat}}$$

La nouvelle condition « initiale » s'écrit :  $u_c(t_1) = V_{\text{seuil}} = R_2 V_{\text{sat}} / (R_1 + R_2)$ , soit :

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = k' \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) - V_{\text{sat}} \Leftrightarrow k' = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + 1\right) V_{\text{sat}} \exp\left(\frac{t_1}{\tau}\right) = \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) V_{\text{sat}} \exp\left(\frac{t_1}{\tau}\right)$$

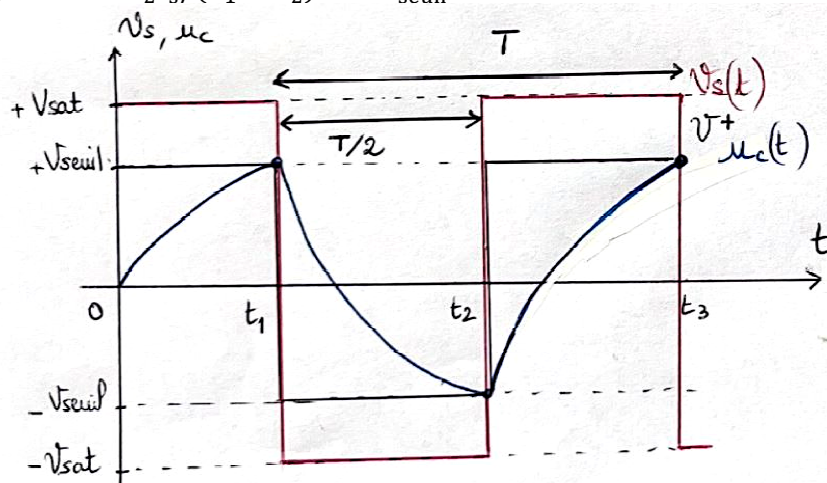
Finalement la solution, valable pour  $t_1 \leq t \leq t_2$ , est :

$$u_c(t) = V_{\text{sat}} \left( \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t - t_1)}{\tau}\right) - 1 \right)$$

C'est une fonction décroissante :  $u_c(t)$  diminue jusqu'à  $t = t_2$  où  $V_s$  bascule à nouveau à  $+V_{\text{sat}}$  lorsque  $u_c(t_2) = -V_{\text{seuil}}$ . Soit :

$$\begin{aligned} u_c(t_2) = -V_{\text{seuil}} &\Leftrightarrow -\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = V_{\text{sat}} \left( \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) - 1 \right) \\ \Leftrightarrow -\frac{R_2}{R_1 + R_2} + 1 &= \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} &= \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 + R_2}\right) \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) \\ \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}\right) &= \frac{R_1}{2R_2 + R_1} \\ \Leftrightarrow t_2 - t_1 &= -RC \ln\left(\frac{R_1}{2R_2 + R_1}\right) \\ \Leftrightarrow t_2 &= t_1 + RC \ln\left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1}\right) = t_1 + RC \ln\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

**Q16.** Tracé de  $V_s(t)$ ,  $u_c(t)$  et  $V^+ = R_2 V_s / (R_1 + R_2) = \pm V_{\text{seuil}}$



**Q17.** La période correspond à  $T = 2(t_2 - t_1)$ , soit :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2RC \ln\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)} = \mathbf{1,049 \text{ Hz}}$$

**Q18.** Les impédances de deux condensateurs s'additionnent lorsque les condensateurs sont **placés en série** :

$$Z_{C,\text{eq}} = Z_{C_1} + Z_{C_2} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} = \frac{jC_1\omega + jC_2\omega}{jC_1\omega jC_2\omega} = \frac{1}{j\omega} \left( \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) = \frac{1}{j\omega C_{\text{eq}}}$$

Par identification :  $C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$  et pour  $C_1 = C_2 = C$  on a  $C_{\text{eq}} = \frac{C}{2}$

Avec deux condensateurs de capacité 1,000  $\mu\text{F}$  placés en série on peut donc obtenir une capacité équivalente de 500,0 nF.

**Q19.** Les expérimentateurs obtiennent des valeurs différentes à cause de différentes sources d'incertitudes :

- Incertitudes sur les valeurs des composants (voir données constructeur)
- Incertitude sur l'appareil de mesure de la fréquence
- Incertitude de l'expérimentateur lors de la mesure (position des curseurs si utilisation de l'oscilloscope,...)

Il y a  $N = 15$  mesures effectuées, l'incertitude-type s'écrit :

$$u(f) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{0,025}{\sqrt{15}} = \mathbf{0,0065 \text{ Hz}}$$

On peut retenir  $u(f) = \mathbf{0,007 \text{ Hz}}$  pour une présentation du résultat.

Ecart normalisé (Z-score) :

$$Z = \frac{|f - \bar{f}|}{u(f)} = \frac{|1,049 - 1,053|}{0,0065} = \mathbf{0,62 < 2}$$

Le Z-score est inférieur à 2, les mesures sont donc compatibles.

**Q20.** En branchant la diode à la sortie, la tension aux bornes de la diode est  $V_s(t)$ . Elle est donc alternativement positive ou négative et peut éventuellement clignoter à la période  $T$  d'environ 1 seconde.

Calculons le courant nécessaire pour la diode :

$$P = UI \Leftrightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{U}{V_{\text{sat}}} = \frac{25}{14} = \mathbf{1,79 \text{ A}}$$

Le courant nécessaire est bien supérieur à l'intensité du courant en sortie de l'ALI (25 mA). **Ce montage seul ne permet donc pas le clignotement de la lampe.**

## Partie C – C'est parti !

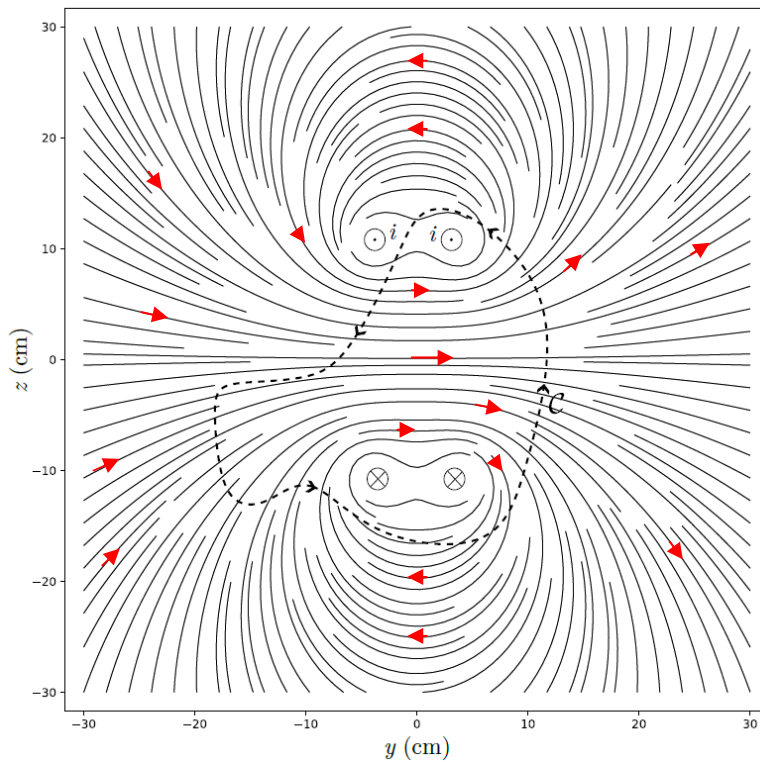
### I – Le moteur linéaire synchrone

**Q21.** Equations de Maxwell vérifiées par le champ  $\vec{B}$  en magnétostatique (cas stationnaire) :

	Maxwell-Thomson	Maxwell-Ampère
Forme locale	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Forme intégrale	$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$

**Q22.** En prenant un point  $M$  quelconque de l'axe des spires, on remarque que tous les plans contenant l'axe  $y$  sont des plans d'anti-symétries de la distribution de courants. Le champ magnétique appartient aux plans d'anti-symétrie des courants, il est donc à l'intersection de tous ces plans, selon le vecteur  $\vec{e}_y$  :  $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_y$ .

**Q23.** D'après l'orientation des courants :



Lorsque les lignes de champ s'éloignent le champ est moins intense. A l'inverse lorsque les lignes se rapprochent, le champ est plus intense. Le champ B est à flux conservatif ( $\text{div}(\vec{B}) = 0$ ).

**Q24.** D'après le théorème d'Ampère (ou l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum \bar{I}_{\text{enlacés}}$$

Ici d'après l'orientation du contour,  $\sum \bar{I}_{\text{enlacés}} = +i - i - i = -i$ .

On en déduit :  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\mu_0 i = -1,26 \cdot 10^{-6} \times 1,0 \cdot 10^3 = -1,3 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{m}$

**Q25.** Deux pôles Nord (resp. Sud) magnétiques se repoussent, la position  $x = 0$  est donc **instable** et doit correspondre à un **maximum d'énergie potentielle**. C'est donc le **profil B** qui est adapté.

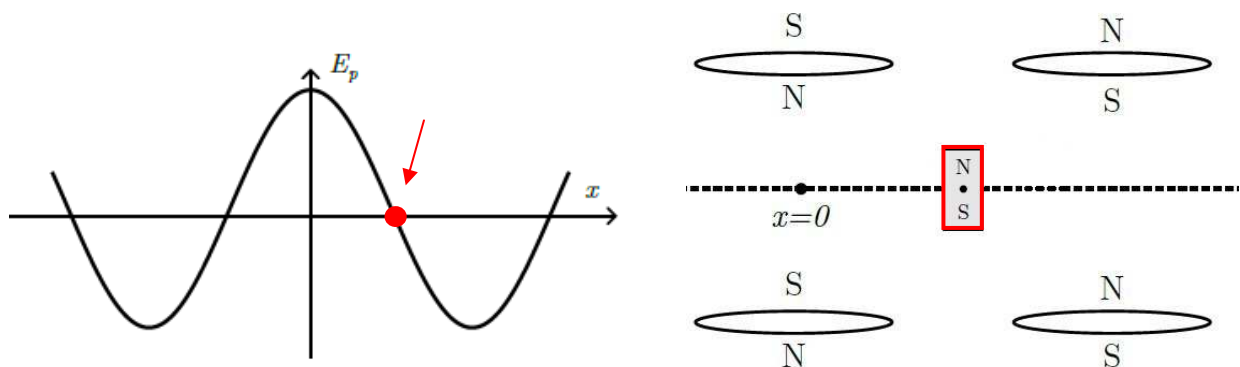
Par ailleurs, lorsque un pôle Nord et au voisinage d'un pôle Sud, les pôles s'attirent, la position est stable et correspond à un minimum d'énergie potentielle (pour les deux positions de part et d'autre de  $x = 0$ ). C'est en accord avec le profil B.

**Q26.** Rappel :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x$$

- Pour avoir une force dirigée vers la droite, il faut  $\frac{\partial E_p}{\partial x} < 0$
- Pour avoir une force maximale, il faut  $\frac{\partial E_p}{\partial x}$  maximal, soit se placer à la plus grande pente.

On cherche donc sur le tracé la position où la courbe est décroissante avec la plus grande pente. L'aimant doit donc être entre les deux spires :



L'aimant est repoussé par les spires de gauche et attiré par les spires de droite.

**Q27.** Pour maintenir une force toujours dirigée vers la droite, il faut donc inverser les pôles Nord et Sud des bobines une fois que l'aimant est poussé ce qui se fait via le système de contrôle en **inversant le sens de circulation du courant**.

La commande électronique du courant dans les spires doit se faire à partir de la **connaissance de la position du train**, d'où la rétroaction nécessaire pour apporter une réponse adaptée.

Il faut donc placer des **capteurs de position** du train tout au long de la piste. Il est possible d'utiliser des **capteurs inductifs notamment (à effet Hall)**.

**Q28.** Les 5 faces de la plaque sont juxtaposées et soumises à la même différence de température ( $T_{\text{plaque}}(t) - T_{\text{air}}$ ).

Dans l'analogie avec l'électricité, on peut les considérer comme étant placées en parallèle.

Par ailleurs, toujours par analogie :

$$R_{cc} = \frac{\Delta T}{\phi_{\text{plaque} \rightarrow \text{air}}} = \frac{T_{\text{plaque}}(t) - T_{\text{air}}}{\varphi_{\text{plaque} \rightarrow \text{air}} S} = \frac{1}{hS}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{R_{th}} = \sum_i \frac{1}{R_{cc,i}} = \sum_i hS_i = h \sum_i S_i = h S_{tot} \Rightarrow R_{th} = \frac{1}{hS_{tot}} = \frac{1}{h(2ab + 2be + ae)}$$

Dans l'hypothèses  $e \ll a, b$  :

$$R_{th} \approx \frac{1}{2hab} = \frac{1}{2 \times 30 \times 1,0 \times 0,2} = 0,083 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \text{ (valeur non demandée)}$$

**Q29.** Premier principe appliqué à la plaque :  $dU = -\delta Q_{cc} = -\phi_{\text{plaque} \rightarrow \text{air}} dt$

Or  $dU = mc_a dT_{\text{plaque}}$  pour une phase condensée et  $m = \rho_a V_{\text{plaque}} = \rho_a abe$

Soit :

$$\begin{aligned} \rho_a abe \times c_a dT &= -\frac{(T_{\text{plaque}}(t) - T_{\text{air}})}{R_{th}} dt = -2hab(T_{\text{plaque}}(t) - T_{\text{air}}) dt \\ \Leftrightarrow \frac{dT_{\text{plaque}}}{dt} + \frac{2h}{\rho_a c_a e} T_{\text{plaque}}(t) &= \frac{2h}{\rho_a c_a} T_{\text{air}} \end{aligned}$$

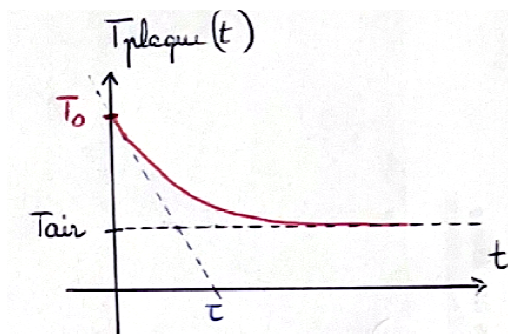
On pose le temps caractéristique  $\tau$  :

$$\tau = \frac{\rho_a c_a e}{2h} = \frac{7,8 \cdot 10^3 \times 450 \times 5 \cdot 10^{-3}}{2 \times 30} = 292,5 \text{ s}$$

**Q30.** Résolution de l'équation différentielle d'ordre 1 :  $T_{\text{plaque}}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + T_{\text{air}}$

À  $t = 0$ ,  $T_{\text{plaque}}(0) = T_0 = A + T_{\text{air}} \Rightarrow A = T_0 - T_{\text{air}}$

$$\text{Finalement, } T_{\text{plaque}}(t) = (T_0 - T_{\text{air}}) e^{-\frac{t}{\tau}} + T_{\text{air}}$$



**Q31.** Le départ suivant est à  $t_1 = 2 \text{ min } 30 = 150 \text{ s}$ .

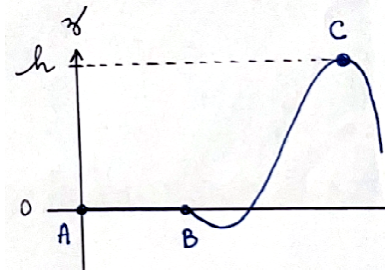
$$T_1 = T_{\text{plaque}}(t_1) = (50 - 20) e^{-\frac{150}{292,5}} + 20 = 38 \text{ }^\circ\text{C}$$

La plaque peut enmagasiner  $Q_{\text{max}} = \Delta H = mc_a \Delta T_{\text{max}} = \rho_a abe c_a (T_{\text{max}} - T_{\text{plaque}}(t_1))$

$$\text{A.N. } Q_{\text{max}} = 7,8 \cdot 10^3 \times 1 \times 0,2 \times 5 \cdot 10^{-3} \times 450 \times (50 - 38) = 42,1 \text{ kJ}$$

## II - Quelques mouvements

Q32. On peut modéliser la situation en deux phases :



De A à B : pendant la phase d'accélération rectiligne : accélération constante  $a = 1,15 g$  pendant  $t_a = 2,5$  s, qui permet d'atteindre une vitesse  $v_0$  :

$$v_0 = a \times t_a = 1,15 \times 9,81 \times 2,5 = \mathbf{28,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

De B à C : entre la fin de la zone de lancement et le haut du « fer à cheval », on néglige les frottements, le mouvement est conservatif. Théorème de l'énergie mécanique :

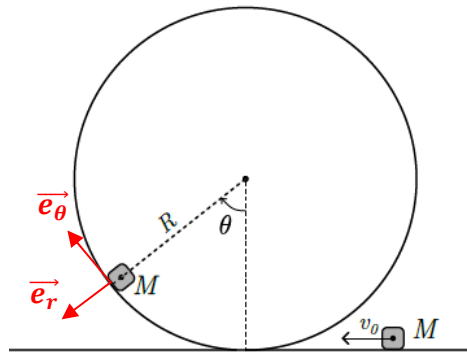
$$E_{m,B} = E_{m,C} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_c^2 + mgh \Rightarrow v_c = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

Le train peut franchir cette première figure si  $v_c > 0$ , soit  $v_0 > \sqrt{2gh}$

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 37} = \mathbf{26,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} < v_0$$

**Le wagon peut franchir l'obstacle.**

Q33. Base polaire :



Lors d'un mouvement circulaire :  $\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$  et  $\vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

Or  $v = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{v} = R\ddot{\theta}$  et  $R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$

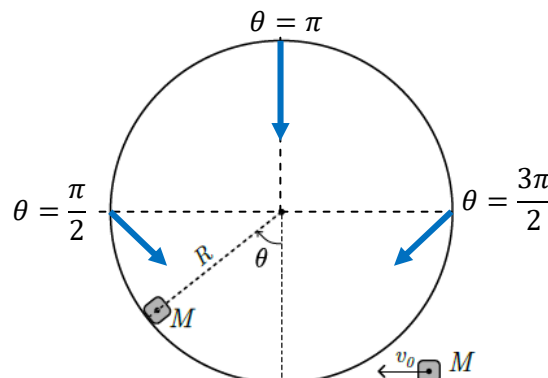
On en déduit :

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

Q34. Pour  $\theta = \pi/2$ , la vitesse est en décroissance, on a donc  $\dot{v} < 0$  :  $\vec{a}$  est selon  $-\vec{e}_\theta$  et  $-\vec{e}_r$ .

Pour  $\theta = \pi$ , la vitesse est en décroissance, on a donc  $\dot{v} = 0$  :  $\vec{a}$  est selon  $-\vec{e}_r$  uniquement.

Pour  $\theta = 3\pi/2$ , la vitesse croît lorsque le train descend du looping, on a donc  $\dot{v} > 0$  :  $\vec{a}$  est selon  $+\vec{e}_\theta$  et  $-\vec{e}_r$ .



Q35. Bilan des forces appliquées au point matériel M :

- Poids :  $\vec{P} = -mg \vec{e}_y = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta)$

- Réaction du support t :  $\vec{N} = -N \vec{e}_r$

PFD projeté suivant  $\vec{e}_\theta$  :

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0$$

Il n'est pas possible de résoudre facilement cette équation de façon analytique puisqu'elle n'est pas linéaire. Il faudrait pour cela se placer dans le cas de l'approximation des petits angles, mais cette approximation n'est évidemment pas valable dans le cadre de cette étude.

**Q36.** Programme Python :

```

9 def derivee(X,t):
10
11     return (X[1],-g/R*np.sin(X[0]))
12
13 theta0 = 0 # Angle initial
14 dtheta0 = v0/R # Vitesse angulaire initiale
15 res= odeint (derivee,[theta0,dtheta0],tabt)

```

**Q37.** Le looping est effectué lorsque l'on atteint  $\theta = 2\pi = 6,28$  rad. Graphiquement on lit  $t_f \approx 5$  s.

## Partie D - L'arrivée

**Q38.** Les conditions de Gauss permettent un stigmatisme approché, cela correspond à :

- Des rayons proches de l'axe optique
- Des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique

**Q39.** Ici on a  $\overline{OA} = -D = -3$  m,  $\overline{OA'} = d$  et  $f' = 5,00$  cm. Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow d = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{D}\right)^{-1}$$

A.N. :  $d = 0,049$  m = **4,9 cm**.

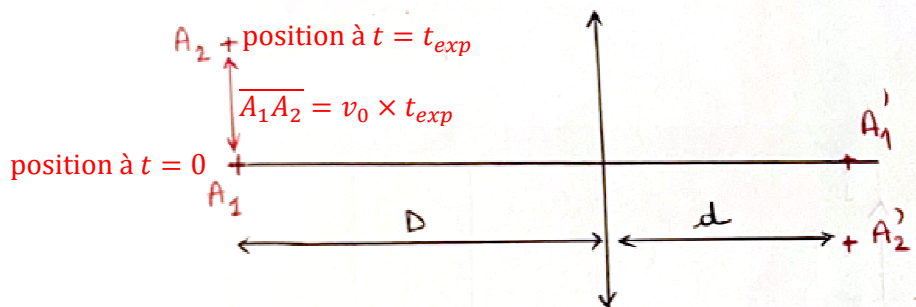
Remarque : le capteur est presque sur le foyer image  $F'$  l'objet est situé à  $D$  grand (presque considéré comme infini devant les dimensions du système).

**Q40.** Le capteur possède une surface  $S = L \times l$  qui correspond à une surface en pixels  $Na^2$ . Soit :

$$a = \sqrt{\frac{L \times l}{N}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 10^{-3} \times 36 \cdot 10^{-3}}{24 \cdot 10^6}} = 6,0 \cdot 10^{-6} \text{ m} = \mathbf{6,0 \mu\text{m}}$$

**Q41.** On considère un point  $A_1$  de l'objet qui se déplace vers un point  $A_2$  pendant le temps  $t_{exp}$ . Soient  $A_1'$  et  $A_2'$  les images conjuguées correspondantes.

L'image sera nette si  $A_1'$  et  $A_2'$  sont sur le même pixel, sinon elle sera floue.



D'après la relation sur le grandissement :

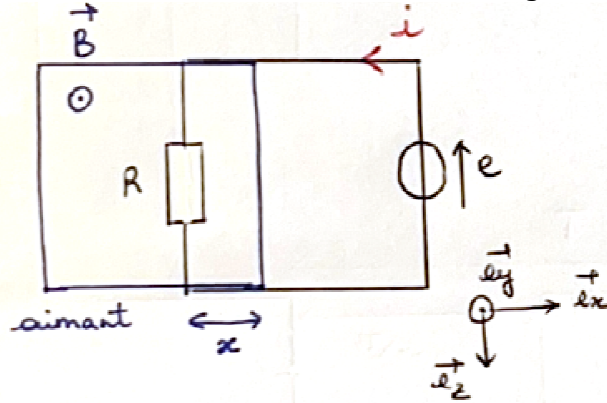
$$\frac{\overline{A_1'A_2'}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{d}{D} \Leftrightarrow \overline{A_1'A_2'} = -\frac{d}{D} \times v_0 t_{exp}$$

Il faut que  $|\overline{A_1'A_2'}| < a$  :

$$\frac{d}{D} \times v_0 t_{exp} < a \Leftrightarrow t_{exp} < \frac{Da}{dv_0} \Rightarrow t_{exp} < \mathbf{23 \mu\text{s}}$$

**Q42.** Lorsque l'aimant se déplace dans la spire, le flux du champ  $\vec{B}$  à travers la spire varie : il apparaît une force électromotric  $e$  dans la spire. Le phénomène d'induction va donc créer un courant  $i$  dans la spire qui va alors être soumise à une force de Laplace qui tend à s'opposer au mouvement (loi de Lenz). Le train est ralenti.

**Q43.** On oriente courant pour que la force électromotrice soit en convention générateur.



La loi de Faraday donne :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d}{dt} (Blx) = -Blv$$

Loi des mailles dans la spire :  $e = Ri \Rightarrow Ri = -Blv$

**Q44.** Pour  $0 < x < l$ , la spire est soumise à la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = i \int d\vec{l} \wedge \vec{B} = il \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_y = -ilB \vec{e}_x$$

Or  $i = -Blv/R$ ,

$$\vec{F}_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}} = \vec{F}_L = \frac{B^2 l^2 v}{R} \vec{e}_x = \alpha v \vec{e}_x \quad \text{avec } \alpha = \frac{B^2 l^2}{R}$$

**Q45.** Pour  $l < x < 2l$ , la loi de Faraday est modifiée comme :

$$e' = -\frac{d}{dt} (Bld) \quad \text{avec } l - d + l = x \Rightarrow d = 2l - x$$

$$\text{Soit } e' = Blv$$

D'où  $i = Blv/R$ ,

$$\vec{F}'_L = il(-\vec{e}_z) \wedge B \vec{e}_y = ilB \vec{e}_x = \frac{B^2 l^2 v}{R} \vec{e}_x$$

**Q46.**  $\vec{F}_{\text{spires} \rightarrow \text{train}} = N(-\vec{F}_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}) = -N\alpha v \vec{e}_x$

Lors du freinage,

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{spires} \rightarrow \text{train}} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} \vec{e}_x = -N\alpha v \vec{e}_x$$

En projection selon  $\vec{e}_x$  :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{N\alpha}{m} v = 0 \quad \text{et on pose } \tau = \frac{m}{N\alpha} = \frac{mR}{NB^2 l^2}$$

**Q47.** PFD  $\times v$  et loi des mailles  $\times i$  :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} v = -N\alpha v^2 \\ Ri^2 = -NBlvi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = -N\alpha v^2 = -\frac{NB^2 l^2}{R} v^2 \\ Ri^2 = -NBlv \left( -\frac{Bv}{R} \right) = \frac{NB^2 l^2}{R} v^2 \end{cases}$$

On en déduit le bilan :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = -Ri^2$$

**L'énergie cinétique perdue est dissipée par effet Joule.**

**Q48.** Si on résout l'équation différentielle, la vitesse est de la forme  $v = k \exp(-t/\tau)$ . La vitesse n'atteindra donc jamais rigoureusement 0.

De plus, plus la vitesse diminue, plus la force de freinage est faible. Il est donc nécessaire d'apporter un freinage mécanique supplémentaire pour immobiliser complètement le train.

