

Quelques équations différentielles indispensables en physique

Tous les problèmes de concours y font appel à ces résultats, à savoir absolument par coeur et maîtriser ! (Petites feuilles...)

On se limitera ici aux équations différentielles linéaires de degré 1 et 2 à coefficients constants et à second membre constant :

$$\frac{dy}{dt} + a_0 y = b \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b$$

I. Méthode générale de résolution d'une équation différentielle

A savoir absolument par coeur et dans l'ordre !

- ① On résout l'équation homogène c'est à dire sans second membre (ici $y' + a_0 y = 0$ ou $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$)
- ② On détermine **une** solution particulière y_{part} de l'équation avec second membre.
- ③ La **solution générale** est la somme des solutions homogène et particulière : $y_{\text{gén}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$
- ④ On applique **finale**ment la ou les conditions initiales sur la **solution générale** (et pas sur la solution homogène!!!) pour trouver la solution qui convient au problème physique.

Remarque : Comme le second membre est ici pris constant (b), on a $y_{\text{part}} = \frac{b}{a_0}$
↪ Justifier ce résultat

II. Premier ordre avec second membre constant : $b(t) = b$

1. Résultat mathématique

Les solutions de $y' + a_0 y = b$ sont les fonctions y de la forme $y(t) = \lambda e^{-a_0 t} + \frac{b}{a_0}$ avec λ constante réelle (il y en a une infinité!)

2. Notation physique

On préfère écrire en physique $y' + \frac{1}{\tau} y = b = \frac{y_{\infty}}{\tau}$ avec $\tau = \frac{1}{a_0}$ temps caractéristique

Les solutions sont alors : $y(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + b\tau = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + y_{\infty}$

↪ Justifier la notation y_{∞}

Le problème physique n'ayant qu'une solution, on détermine la valeur de λ à l'aide d'une condition initiale, souvent avec $y(0)$.

3. Interprétation graphique

On obtient une fonction croissante ou décroissante selon le signe de λ .

La solution particulière fixe le régime permanent et la solution homogène fixe le régime transitoire.

Exemples très fréquents :

- $\lambda < 0$ et $y(0) = 0$ on a alors $y(t) = A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

↪ Exprimer A en fonction des notations du paragraphe 2.

T_0 représente la tangente à la courbe en 0.

Elle coupe l'asymptote du régime permanent au point d'abscisse (= à l'instant) $t = \tau$.

↪ Le démontrer en écrivant l'équation de la tangente à l'origine : sa pente est par définition la valeur de la dérivée de $y(t)$ en $t = 0$, et en cherchant l'intersection de cette droite avec celle d'équation $y = A$

τ	3τ	5τ
63%	95%	99%

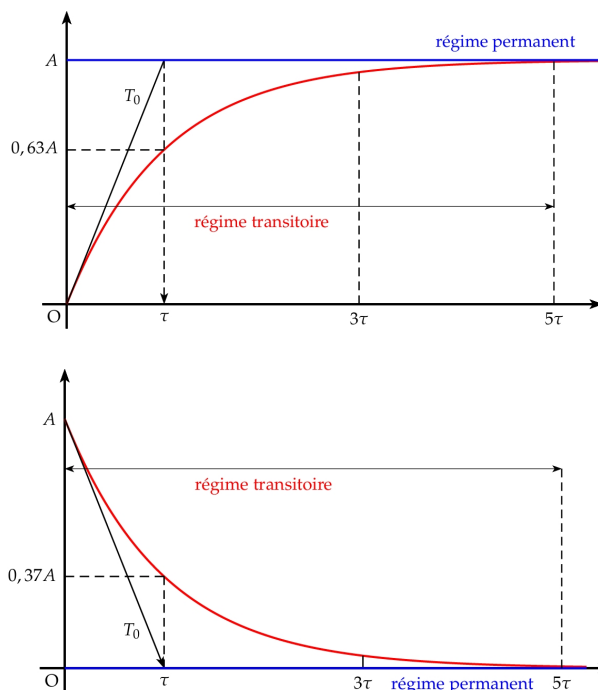
↪ Vérifier ces valeurs en calculant à la machine $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ à ces trois instants.

- $\lambda > 0$ et $y(0) = A$ on a alors $y(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$

T_0 représente la tangente à la courbe en 0. Elle coupe l'asymptote du régime permanent (ici l'axe des abscisses) à $t = \tau$.

τ	3τ	5τ
37%	5%	1%

τ représente l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.



III. Second ordre

1. Résultats mathématiques

A l'équation $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, on associe le polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + a_1 X + a_0$ de discriminant $\Delta = \sqrt{a_1^2 - 4a_0}$.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines réelles X_1 et X_2 , les solutions sont : $y(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double X_0 , les solutions sont : $y(t) = (\lambda + \mu t) e^{X_0 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
- Si $\Delta < 0$, P admet deux racines complexes conjuguées $X_1 = X_0 + i\omega$ et $X_2 = X_0 - i\omega$, alors les solutions peuvent se mettre sous la forme :
$$\begin{cases} y(t) = \lambda e^{X_0 t} [\sin(\omega t + \varphi)], & (\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{ou } y(t) = e^{X_0 t} [\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)], & (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Dans le cas particulier $y'' + a_0 y = 0$ (donc $a_1 = 0$ et $\Delta < 0$), P a des racines imaginaires pures $X_1 = i\omega$ et $X_2 = -i\omega$,

alors
$$\begin{cases} y(t) = \lambda \sin(\omega t + \varphi) \\ \text{ou } y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \end{cases}$$

Remarque : cette méthode marche aussi avec des coefficients a_0, a_1 complexes, on a pour $\Delta \neq 0$ les solutions $y(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (les racines de Δ X_1 et X_2 sont a priori complexes)

2. Notations physiques (voir aussi fiche)

On préfère en physique les formes canoniques
$$\begin{cases} y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = 0 \\ y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha \text{ coefficient d'amortissement (s}^{-1}\text{)} \\ \omega_0 \text{ pulsation propre (s}^{-1}\text{)} \\ Q : \text{facteur de qualité (sans dimension)} \end{cases}$$

Alors $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2)$.

• Si $\Delta > 0$, comme α et ω_0 sont positifs, les racines réelles X_1 et X_2 sont négatives. Les solutions de l'équation homogène sont la combinaison linéaire de deux exponentielles décroissantes :

$$y(t) = \lambda e^{X_1 t} + \mu e^{X_2 t}$$

Le régime est dit **apériodique**, il n'y a pas d'oscillation autour de l'axe des abscisses.

• Si $\Delta = 0$, comme les coefficients α et ω_0 sont positifs, la racine double X_0 est négative. Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = (\lambda + \mu t) e^{X_0 t}$$

Le régime est dit **apériodique critique**, il n'y a pas d'oscillation autour de l'axe des abscisses, et le **retour à l'équilibre** est alors **le plus rapide**.

• Si $\alpha = 0$ on a alors $\Delta = -\omega_0^2$. Les racines sont donc $\pm i\omega_0$. Les solutions sont purement sinusoïdales :

$$y(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou} \quad y(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Le régime est dit **harmonique**.

• Si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées. On pose $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Les racines sont alors $-\alpha \pm i\omega_p$ et les solutions de l'équation sont :

$$y(t) = [\lambda \cos(\omega_p t) + \mu \sin(\omega_p t)] e^{-\alpha t} \quad \text{ou} \quad y(t) = A \sin(\omega_p t + \varphi) e^{-\alpha t}$$

Le régime est dit **pseudo-périodique**, il y a donc des oscillations autour de l'axe des abscisses de moins en moins grande avec une fréquence plus petite que la fréquence propre ($\omega_p < \omega_0$).

Schématiquement :

