

Signaux physiques n°1

Systèmes du premier ordre

Vous devez savoir

- ☞ établir et résoudre l'équation différentielle pour un système mécanique ou électrique du 1^{er} ordre ;
- ☞ identifier et évaluer numériquement des temps caractéristiques
- ☞ tracer l'allure d'un régime transitoire ;
- ☞ utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité à travers une bobine ;
- ☞ analyser une équation différentielle non linéaire, sans la résoudre.

Ordres de grandeur à retenir

- ☞ raideur d'un ressort : quelques ms ;
- ☞ temps caractéristique en mécanique : quelques s.

I. Exemples d'évolution temporelle

1.1. Exemple mécanique : la chute visqueuse

a) Mise en équations

On s'intéresse à la chute verticale d'une bille M de masse m dans un fluide très visqueux (par exemple la glycérine), décrite dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}$), supposé galiléen. Elle subit son poids ainsi qu'une force de frottements fluide linéaire, et elle a une vitesse initiale nulle : $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}(t=0) = \vec{0}$.

On s'intéresse à la vitesse $\vec{v}_{M/(\mathcal{R})} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$.

On écrit la 2^e loi de Newton en coordonnées cartésiennes,

axe vers le bas :

$$m \frac{d\vec{v}_{M/(\mathcal{R})}}{dt} = m \vec{g} - \lambda \vec{v}_{M/(\mathcal{R})} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{\lambda} \frac{dv_x}{dt} + v_x = 0 \\ \frac{m}{\lambda} \frac{dv_y}{dt} + v_y = 0 \\ \frac{m}{\lambda} \frac{dv_z}{dt} + v_z = \frac{mg}{\lambda} \end{cases}$$

Remarquons que pour que ces équations soient homogènes, il faut que m/λ soit homogène à un temps ; on introduit donc $\tau = m/\lambda$, et les équations du mouvement sont alors

$$\tau \frac{dv_x}{dt} + v_x = 0 \quad ; \quad \tau \frac{dv_y}{dt} + v_y = 0 \quad ; \quad \tau \frac{dv_z}{dt} + v_z = \frac{mg}{\lambda} \quad (1)$$

b) Résolution

Il s'agit d'équations différentielles linéaires du premier ordre ; on peut les résoudre avec la méthode vue au cours précédent : pour la projection sur x/y , il s'agit d'une équation homogène (sans second membre), donc

$$v_x = Ae^{-t/\tau}$$

avec A qui dépend des CI : ici $v_x(t=0) = 0$, donc

$$0 = A \Rightarrow v_x(t) = 0, \quad \text{de même pour } v_y$$

Pour v_z , il faut trouver une solution particulière, ici constante ; puisqu'il s'agit de la vitesse lorsque l'accélération est nulle, il s'agit de la **vitesse limite** vue précédemment :

$$0 + v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\lambda} \Rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\lambda} \quad (2)$$

d'où

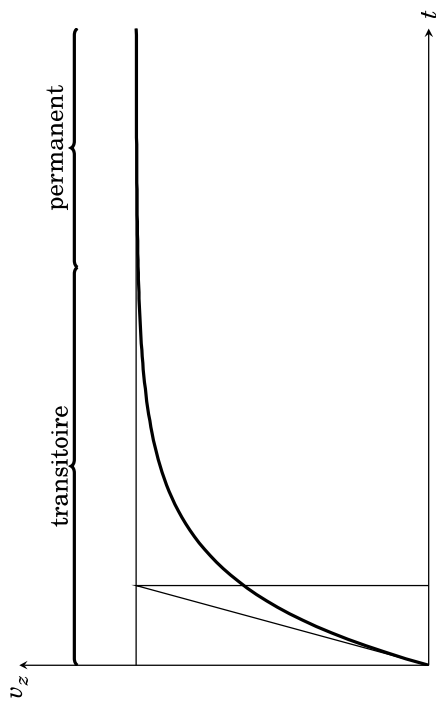
$$v_z(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{\text{lim}}$$

puis on applique les CI :

$$v_z(t=0) = 0 = A + v_{\text{lim}} \Rightarrow v_z(t) = v_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (3)$$

On peut tracer l'allure de cette solution :

- quand $t \rightarrow \infty$, $v_z \rightarrow v_{\text{lim}}$ (ce qui est cohérent avec la notion de vitesse limite) ;
- quand $t = \tau$, $v_z = 0, 63v_{\text{lim}}$;
- quand $t = 3\tau$, $v_z = 0, 95v_{\text{lim}}$;
- quand $t = 5\tau$, $v_z = 0, 99v_{\text{lim}}$;
- on fait attention à la condition initiale !



Propriété – tangente à l'instant initial

La tangente en 0 coupe la droite $y = v_{\text{lim}}$ en $t = \tau$, ce qui permet de mesurer τ sur un relevé expérimental.

Preuve : cette tangente a pour équation :

$$y = \frac{dv_z}{dt}(t=0)(t-0) + v_z(t=0) = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}t$$

qui vaut bien v_{lim} en $t = \tau$.

c) Régime transitoire, régime permanent

On peut distinguer deux phases pour la vitesse :

- une phase finale, au cours de laquelle la vitesse n'évolue plus : on dit qu'elle a atteint son **régime permanent stationnaire**. Notons que cette vitesse en régime stationnaire est

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\lambda}$$

qui dépend du poids et de λ , mais **pas** des CI.

- une phase d'accélération, durant laquelle v_z se rapproche de sa vitesse limite : on parle de **régime transitoire**.

Mathématiquement, on constate que v_z n'atteint jamais v_{lim} ; mais physiquement, dès qu'il en sera suffisamment proche (pour l'usage que l'on souhaite en faire, ou par rapport à la précision des mesures), on pourra le considérer terminé. En pratique, on remarque que, en ordre de grandeur, **le transitoire dure quelques τ** . Si on souhaite un critère plus quantitatif, deux conventions sont très courantes :

- pour les physiciens, le régime transitoire est fini quand
$$\frac{v_{\text{lim}} - v_z(t)}{v_{\text{lim}}} < 1\% \Leftrightarrow t > 5\tau$$
- en SII, on retient plus souvent le critère
$$\frac{v_{\text{lim}} - v_z(t)}{v_{\text{lim}}} < 5\% \Leftrightarrow t > 3\tau$$

Numériquement, pour une bille en fer de diamètre 1 cm dans la glycérine,

$$m = 4,1 \text{ g} \quad \text{et} \quad \lambda = 0,14 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \tau = 29 \text{ ms} \quad \text{et} \quad v_{\text{lim}} = 0,29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

donc le régime transitoire est très rapide.

d) Interprétation mathématique et physique

Remarquons que v_z varie très rapidement au début, et très lentement quand $v_z \rightarrow v_{\text{lim}}$; cela se comprend sur l'équation différentielle en la retravaillant un peu :

$$(1) \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = \frac{v_{\text{lim}} - v_z}{\tau}$$

qui permet également de comprendre que si $\tau \nearrow$, alors $\frac{dv_z}{dt} \searrow$, donc v_z varie plus lente-

ment (ce qui est cohérent avec un transitoire plus long).

On interprète donc les deux éléments principaux :

- le temps caractéristique d'évolution $\tau = m/\lambda$ augmente avec l'inertie du système, ce qui est attendu puisque la force de traînée aura moins d'impact pour un système plus lourd, ce qui conduit à plus de temps pour atteindre la vitesse limite ; et il diminue avec λ , pour la raison exactement inverse : si λ augmente, la force de traînée augmente ;
- la vitesse limite $v_{\text{lim}} = mg/\lambda$ est dirigée vers le bas, ce qui est attendu ; elle augmente avec le poids, qui est le moteur du mouvement ; et elle diminue avec λ , puisque la force de traînée pourra compenser le poids avec une vitesse plus faible si λ est plus important.

Finalement, interprétons physiquement cette solution :

- au tout début, $\vec{F}_{f \rightarrow M} = \vec{0}$, donc l'accélération n'est due qu'au poids ; on retrouve en effet une chute libre avec une approximation linéaire de $e^{-t/\tau}$ autour de $t = 0$:

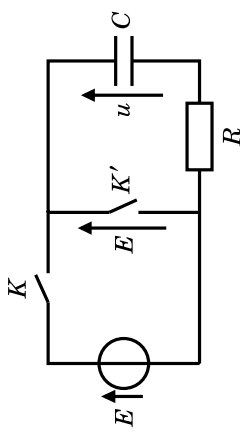
$$v_z(t) = v_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau}) \approx v_{\text{lim}} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \right\} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} t \stackrel{(2)}{=} gt$$

- ensuite, $v_z \nearrow$, donc la force de frottements augmente ; on comprend ainsi que l'accélération diminue progressivement, et soit d'autant plus faible que v_z est importante
- quand $\vec{F}_{f \rightarrow M} + m\vec{g} = \vec{0}$, alors l'accélération devient nulle : la vitesse ne change plus, on a atteint le régime permanent, ici un mouvement rectiligne et uniforme.

1.2. Exemple électrocinétique : le circuit RC

On s'intéresse au circuit ci-contre, que l'on utilise pour deux expériences :

- soit les deux interrupteurs sont ouverts, le condensateur est chargé et les tensions n'évoluent plus ; on ferme l'interrupteur K' à $t = 0$ et on observe la tension aux bornes du condensateur diminuer jusqu'à 0 (régime libre) ;
- soit les deux interrupteurs sont ouverts, le condensateur est déchargé et les tensions n'évoluent plus ; on ferme l'interrupteur K à $t = 0$ et on observe la tension aux bornes du condensateur augmenter jusqu'à E (réponse in-



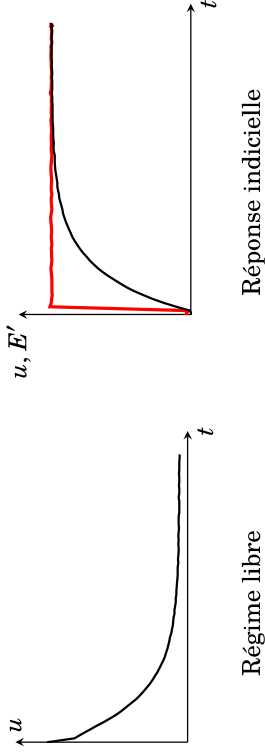


Figure 1 : Relevés expérimentaux : charge et décharge du circuit RC

a) Régime libre

On oriente le circuit ; on considère un condensateur initialement chargé : $q(t < 0) = q_0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

Analyse des conditions initiales :

À $t < 0$, l'interrupteur est ouvert donc $i(t < 0) = 0$; le condensateur est chargé et la tension à ses bornes vaut donc $u(t < 0) = q_0/C$. D'après la loi des mailles,

$$u + u_{K'} + 0 = 0 \Rightarrow u_{K'}(t < 0) = 0$$

Lorsqu'on ferme l'interrupteur, $u_{K'}$ bascule brutalement à 0 : $u_{K'}(t = 0^+) = 0$: elle est donc discontinue en $t = 0$. Par ailleurs, la charge d'un condensateur (et donc la tension à ses bornes) est une fonction **continue** du temps. On peut donc écrire :

$$q(t = 0^+) = q(t = 0^-) = q_0 \Rightarrow u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = \frac{q_0}{C}$$

Enfin, on obtient l'intensité à $t = 0^+$ à l'aide de la loi des mailles juste après fermeture de l'interrupteur :

$$u + 0 + Ri = 0 \Rightarrow i(t = 0^+) = -\frac{u(t = 0^+)}{R} = -\frac{q_0}{RC}$$

On constate que i n'est pas continue en $t = 0$.

Prévision du régime stationnaire :

On sait qu'en régime stationnaire, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où le circuit équivalent ci-contre ; la loi des mailles conduit alors à

$$u_\infty = 0$$

On constate que dans l'état final, la tension aux bornes du condensateur tend vers zéro (le condensateur est déchargé), ce qui se comprend assez bien à partir de la loi de fonctionnement du condensateur : à la fin de l'évolution, les grandeurs électriques ne varient plus, donc

$$q_\infty = C^{te} \Rightarrow i_\infty = \frac{dq}{dt}(t \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow u_\infty = -Ri_\infty = 0 \Rightarrow q_\infty = 0$$

Évolution temporelle pour $t > 0$:

On écrit la loi des mailles et les lois des dipôles

$$\begin{cases} Ri + u = 0 \\ i = \frac{dq}{dt} \\ q = Cu \end{cases} \Rightarrow RC \frac{dq}{dt} + q = 0$$

Cette équation différentielle (et l'ensemble du système) **contraint l'évolution du circuit à tout instant**. Pour obtenir l'évolution du système, il faut donc **résoudre l'équation différentielle**.

On constate qu'elle n'est valable que si RC est homogène à un temps ; on introduit donc $\tau = RC$.



C'est un résultat à retenir pour l'homogénéité : $[RC] = T$

L'ensemble des solutions possibles est

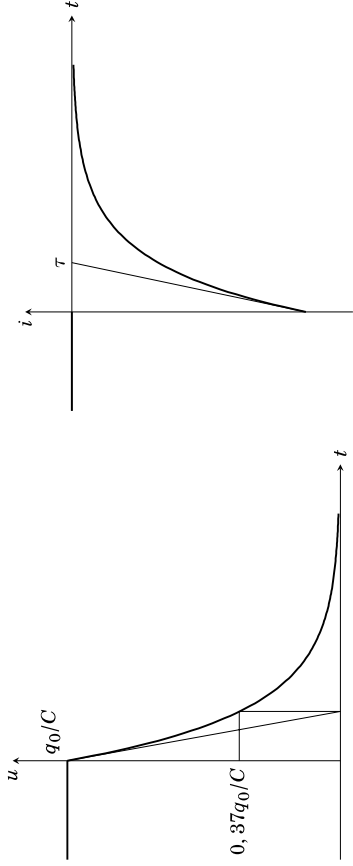
$$q(t) = Ae^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = RC \text{ et } A \in \mathbb{R}$$

Pour trouver la constante correspondant à notre évolution, il faut trouver une valeur de $u(t)$ à un instant particulier : c'est ici que l'analyse des conditions initiales trouve son intérêt. On injecte alors la CI dans la solution :

$$q(t = 0) = A = q_0 \Rightarrow q(t) = q_0 e^{-t/\tau} \text{ et } u(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/\tau}$$

Si on a besoin d'une autre information, on utilise le système d'équations du début ; par exemple pour l'intensité et la charge :

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow i(t) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$



On peut tracer ces courbes : on constate qu'elles correspondent à l'observation expérimentale, et on identifie à nouveau **régime transitoire** et **régime permanent stationnaire**. On retrouve les propriétés pratiques de ces fonctions pour exploiter des courbes expérimentales :

- la droite tangente à l'origine coupe la valeur finale (zéro) en $t = \tau$
- on considère que l'évolution est finie lorsque $t = 3\tau$ ($u = 0,05u_0$) ou $t = 5\tau$ ($= 0,01u_0$).

On constate que l'intensité n'est **pas** une fonction continue du temps en $t = 0$. On comprend donc que l'argument physique sur la continuité de la charge portée par le condensateur était absolument nécessaire.

Donnons quelques ordres de grandeur : typiquement en TP, $R \sim 10 \text{ k}\Omega$ et $C \sim 100 \text{ nF}$ donc $\tau \sim 1 \text{ ms}$

b) Réponse à un échelon (ou réponse indicelle)

L'interrupteur K' restant à présent toujours ouvert, le circuit est équivalent à celui ci-contre. On impose un échelon de tension aux bornes du circuit RC en fermant l'interrupteur K :

$$u_{AB}(t < 0) = 0 \quad ; \quad u_{AB}(t > 0) = E$$

Le condensateur est initialement déchargé :

$$q(t < 0) = 0 \Rightarrow u(t < 0) = 0$$

Analyse des conditions initiales .

À $t < 0$, l'interrupteur est ouvert donc $i(t < 0) = 0$; on en déduit par loi des mailles avec $u(t < 0) = 0$ que $u_K(t < 0) = E$.

À la fermeture de K , u_K varie de façon discontinue et vaut $u_K(t > 0) = 0$. La charge (et la tension) aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps donc

$$q(t = 0^+) = q(t = 0^-) = 0 \quad \text{et} \quad u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = 0$$

La loi des mailles permet de compléter

$$E - Ri(t = 0^+) - 0 = 0 \Rightarrow i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$$

On constate que i n'est pas continue en $t = 0$.

Prévision du régime stationnaire :

On sait qu'en régime stationnaire, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où le circuit équivalent ci-contre ; la loi des mailles conduit alors à

$$u_\infty = E$$

On constate que dans l'état final, la tension aux bornes du condensateur tend vers E (le condensateur est déchargé), ce qui se comprend assez bien à partir de la loi de fonctionnement du condensateur : à la fin de l'évolution, les grandeurs électriques ne varient plus, donc

$$q_\infty = C^{te} \Rightarrow i_\infty = \frac{dq}{dt}(t \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow u_\infty = E - Ri_\infty = E \Rightarrow q_\infty = CE$$

Évolution temporelle pour $t > 0$:

On met en équation le phénomène observé avec la loi des mailles et la loi de comportement du condensateur ; on obtient :

$$\begin{cases} u + Ri - E = 0 \\ q = Cu \\ i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \end{cases} \Rightarrow RC \frac{du}{dt} + u = E$$

On pose à nouveau $\tau = RC$. On résout la nouvelle équation différentielle, avec le second membre :

$$\begin{cases} u_H(t) = Ae^{-t/\tau} & \text{solution de l'équation homogène} \\ u_P(t) = E & \text{solution particulière de l'équation complète, ici constante} \end{cases}$$

Remarquons que la solution particulière s'interprète comme le comportement en régime permanent, ici stationnaire, que nous avons établi précédemment. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation s'écrit

$$u(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

Pour déterminer la constante d'intégration A correspondant à notre évolution, on s'appuie à nouveau sur la condition initiale :

$$\Rightarrow u(t = 0^+) = A + E = 0 \Rightarrow A = -E \quad \text{d'où} \quad u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

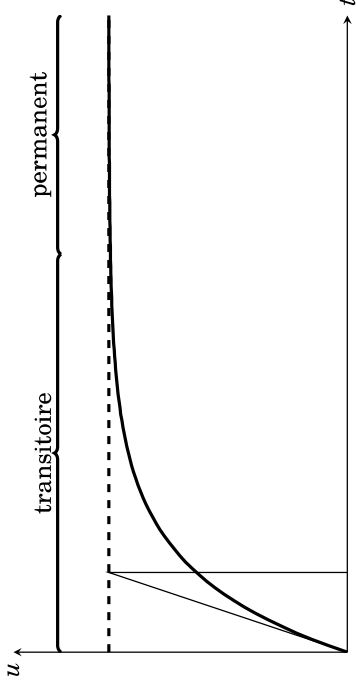
On vérifie bien que l'on retrouve sur ce résultat $u = 0$ à $t = 0$ et $u = E$ à $t \rightarrow \infty$.

On peut également retrouver l'intensité :

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = C \cdot \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

On remarque que dans l'état final, le condensateur empêche le courant de passer à travers sa branche, alors même qu'une tension existe à ses bornes : on retrouve l'idée que **en régime stationnaire, il se comporte comme un interrupteur ouvert**.

On trace le graphe ci-dessous, en vérifiant les conditions initiales et le régime permanent.



On remarque les mêmes points pour l'exploitation d'un graphique expérimental :

- la tangente en $t = 0$ coupe l'axe « stationnaire » $u = E$ en $t = \tau$
- à $t = \tau$, $u = 0,37E$; à $t = 3\tau$, $u = 0,95E$; à $t = 5\tau$, $u = 0,99E$. On a donc une variation significative de la tension, due au temps de réponse du circuit au forçage du générateur.
- au-delà de 5τ , la tension a atteint la commande et ne varie plus significativement.

On remarque également sur son expression que l'intensité n'est pas continue.

Enfin, interprétons physiquement cette évolution :

- initialement, $u = 0$ par continuité de la charge sur les armatures du condensateur ; ainsi à $t = 0^+$, c'est la résistance qui « absorbe » seule la tension E imposée entre A et B ; d'où un courant $i(t = 0^+) = E/R$ qui apparaît ;
- ce courant apporte des charges sur l'armature du condensateur ; il apparaît donc une contre-tension $u \neq 0$, donc $Ri \searrow$, donc $i \searrow$, donc $du/dt \searrow$, d'où le « ralentissement » de la croissance de u ;
- quand $u = E$, $Ri = 0$ donc plus aucun courant ne circule et la situation n'évolue plus : le circuit a atteint le régime stationnaire permanent.

1.3. Deuxième exemple électrocinétique : le circuit RL

On considère le circuit ci-contre ; l'interrupteur K est initialement ouvert, on le ferme à $t = 0$.

Analyse des conditions initiales :

À $t < 0$, l'interrupteur est ouvert donc

$$i(t < 0) = 0 \Rightarrow u(t < 0) = L \frac{di}{dt} (t < 0) = 0$$

et d'après la loi des mailles,

$$E - u_K = 0 \Rightarrow u_K(t < 0) = E$$

Lorsqu'on ferme l'interrupteur, u_K bascule brutalement à 0 : $u_K(t = 0^+) = 0$: elle est donc discontinue en $t = 0$. Par ailleurs, l'intensité à travers la branche d'une bobine est une fonction **continue** du temps. On peut donc écrire :

$$i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0 \xrightarrow{\text{loi des mailles}} u(t = 0^+) = E$$

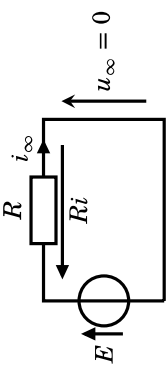
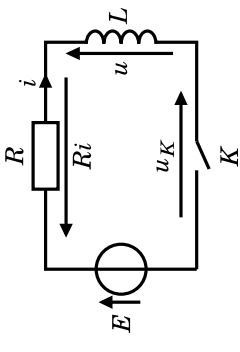
On constate que u n'est pas continue en $t = 0$.

Prévision du régime stationnaire :

On sait qu'en régime stationnaire, une bobine se comporte comme un fil, d'où le circuit équivalent ci-contre ; la loi des mailles conduit alors à

$$Ri_\infty = E$$

On constate que dans l'état final, l'intensité à travers le circuit est celle associée à un circuit à une résistance.



Évolution temporelle pour $t > 0$:

On écrit la loi des mailles et les lois des dipôles

$$\begin{cases} E - Ri - u = 0 \\ u = L \frac{di}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{L \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}}$$

Cette équation différentielle (et l'ensemble du système) **contraint l'évolution du circuit à tout instant**. Pour obtenir l'évolution du système, il faut donc **résoudre l'équation différentielle**.

On constate qu'elle n'est valable que si L/R est homogène à un temps ; on introduit donc $\tau = L/R$. En ordre de grandeur,

$$L = 1 \text{ mH} \quad \text{et} \quad R = 1 \text{ k}\Omega \quad \Rightarrow \quad \tau = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1 \mu\text{s}$$

 C'est un résultat à retenir pour l'homogénéité : $[L/R] = \text{T}$

Une fois cela observé, on peut résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} i_H(t) = Ae^{-t/\tau} & \text{solution de l'équation homogène} \\ i_P(t) = \frac{E}{R} & \text{solution particulière de l'équation complète} \end{cases}$$

Remarquons que la solution particulière s'interprète comme le comportement en régime permanent, ici stationnaire, que nous avons établi précédemment. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation s'écrit

$$i(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

Pour déterminer la constante d'intégration A correspondant à notre évolution, on s'appuie à nouveau sur la condition initiale :

$$\Rightarrow \quad i(t = 0^+) = A + \frac{E}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{E}{R} \quad \text{d'où} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})}$$

On vérifie bien que l'on retrouve sur ce résultat $i = 0$ à $t = 0$ et $i = E/R$ à $t \rightarrow \infty$.

On peut également retrouver la tension aux bornes de la bobine :

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{E}{R\tau} e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau}$$

On remarque que dans l'état final, la bobine a une tension nulle à ses bornes, alors même qu'une intensité non nulle la traverse : on retrouve l'idée que **en régime stationnaire , elle se comporte comme un fil**.

II. Résultats généraux sur les systèmes linéaires du premier ordre

2.1. Analogie électromécanique

En rapprochant les équations de la chute libre et du RL , on peut dresser des analogies :

Grandeur	Chute mécanique	Circuit RL
Grandeur cinétique	v_z	i
Inertie	m	L
Coefficient de frottement	λ	R
Forçage	mg	E
Équation différentielle	$m \frac{dv_z}{dt} + \lambda v_z = mg$	$L \frac{di}{dt} + Ri = E$
Temps caractéristique	m/λ	L/R
Régime stationnaire	mg/λ	E/R

Tableau 1 : Analogie électromécanique



La raison pour laquelle cette analogie se fait avec le RL et non avec le RC apparaîtra au prochain chapitre : en effet, pour la généraliser à d'autres situations, il vaut mieux faire correspondre la position à une charge, et on retrouvera alors

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{analogue à} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

2.2. Résultats généraux

Systèmes linéaires du premier ordre

Un système linéaire du premier ordre est un système dont l'évolution des grandeurs physiques $x(t)$ est régie par une équation différentielle linéaire du premier ordre, de forme canonique :

$$\tau \frac{dx}{dt} + x(t) = f(t)$$

où τ est appelé **temps caractéristique** du système, et donne l'ordre de grandeur de la durée d'un régime transitoire. La fonction $f(t)$ représente le **forçage** imposé au système.

- 

τ ne dépend pas de $f(t)$, donc ne dépend pas du forçage ;

après quelques τ , le système atteint un **régime permanent**, défini par la fonction $f(t)$;

si la fonction $f(t)$ est identiquement nulle, on dit que le système est en **régime libre** ; sinon, il s'agit d'un **régime forcé** ;

si la fonction $f(t)$ est identiquement constante, il s'agit d'un régime permanent **stationnaire** ;

la forme du régime transitoire dépend des conditions initiales ;

pour calculer la constante d'intégration, on applique les conditions initiales à **toute la solution** (solution de l'équation homogène + solution particulière de l'équation complète) ;

la valeur du régime permanent ne dépend pas des conditions initiales : le système « oublie » son état précédent une fois le régime transitoire fini ;

si on ne sait pas trouver de solution particulière, on peut toujours résoudre l'équation complète numériquement par la méthode d'Euler ; le pas de temps sera choisi très petit devant τ pour une bonne intégration.

III. Cas d'une équation d'ordre 1 non linéaire

Notions transférables

Pour une équation différentielle non linéaire, on ne sait pas (en toute généralité) résoudre l'équation. Cependant, on peut toujours dégager les notions générales de temps caractéristique d'évolution et de régime stationnaire.

Traitons l'exemple de la chute, mais à présent nous supposons qu'elle a lieu dans un liquide moins visqueux (air, eau) et nous devons employer un modèle de force de traînée quadratique. La loi de Newton s'écrit alors

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha||\vec{v}||\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} + \alpha\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}v_x = 0 \\ m\frac{dv_y}{dt} + \alpha\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}v_y = 0 \\ m\frac{dv_z}{dt} + \alpha\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}v_z = mg \end{cases}$$

Ce système est très complexe, et peut être résolu par la méthode d'Euler. Cependant, nous allons pour simplifier le propos faire l'hypothèse que le mouvement est purement vertical :

$$\vec{v} = v_z\vec{u}_z \Rightarrow ||\vec{v}|| = |v_z|$$

d'où l'équation simplifiée

$$m\frac{dv_z}{dt} + \alpha|v_z|v_z = mg$$

Cette équation n'est pas linéaire et on ne peut donc pas identifier de temps caractéris-

tique d'évolution sur sa forme mathématique. En revanche, on constate qu'elle admet une solution en régime stationnaire, que l'on interprète à nouveau comme une vitesse limite :

$$v_z = v_{\text{lim}} = C^{\text{te}} \Rightarrow \alpha|v_{\text{lim}}|v_{\text{lim}} = mg$$

donc $v_{\text{lim}} > 0$, ce qui implique que $|v_{\text{lim}}| = v_{\text{lim}}$ et finalement

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}$$

que l'on peut commenter :

- elle est dirigée vers le bas, ce qui est attendu ;
- elle augmente avec le poids, qui est le moteur du mouvement ;
- elle diminue avec α , puisque la force de traînée pourra compenser le poids avec une vitesse plus faible si λ est plus important.

De même, si on ne peut pas identifier un temps caractéristique sur l'équation différentielle, on peut en chercher un par analyse dimensionnelle : celui-ci dépend a priori de m , g et α donc on le cherche sous la forme

$$\tau = m^a g^b \alpha^c \quad \text{avec} \quad [\alpha] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{(L \cdot T^{-1})^2} = M \cdot L^{-1}$$

ce qui n'est homogène que si

$$T = M^a \cdot (L \cdot T^{-2})^b \cdot (M \cdot L^{-1})^c = M^{a+c} \cdot L^{b-c} \cdot T^{-2b}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \\ c = -1/2 \end{cases} \quad \text{soit finalement} \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}$$

que l'on peut également commenter

- il augmente avec l'inertie ;
- diminue avec α ;
- et augmente avec g qui est l'accélérateur du mouvement.

On peut se donner des AN : pour une bille de fer de 1 cm de diamètre dans l'eau,

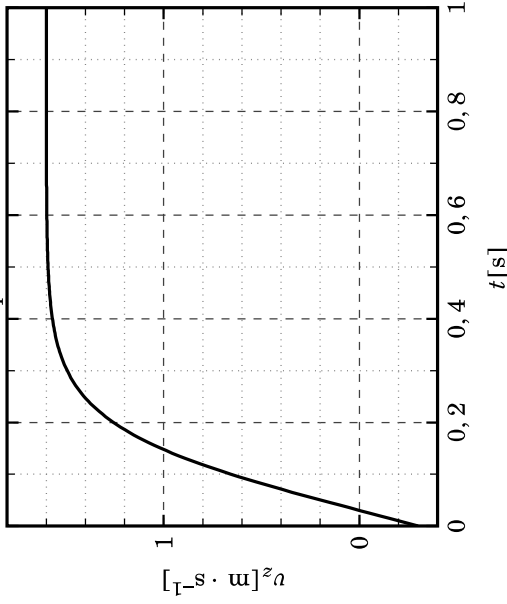
$$m = 4,1 \text{ g} \quad \text{et} \quad \alpha = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \Rightarrow v_{\text{lim}} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \tau = 0,16 \text{ s}$$

On peut résoudre numériquement cette équation avec la méthode d'Euler (avec une vitesse initiale vers le haut pour changer) :

```
def euler_chute_quadratique(v0, m, g, alpha, durée, h):  
    npoints = int(durée/h) + 1  
    tab_y = np.zeros(npoints) # tableau pour la solution  
    tab_t = np.arange(npoints)*h # tableau pour les temps  
    tab_y[0] = y0 # condition initiale  
    for i in range(1, npoints):  
        tab_y[i] = tab_y[i-1] + h*f(tab_y[i-1], tab_t[i])  
    return tab_t, tab_y
```

```
m, g, alpha = 4.1e-3, 9.8, 1.6e-2  
tau = (m / g / alpha)**0.5  
temps, vit = euler_chute_quadratique(-0.3, m, g, alpha, 5*tau, tau/100)
```

et on obtient une courbe comme celle ci-après



On constate que notre raisonnement sur la vitesse limite l'a bien déterminée, et l'analyse dimensionnelle nous a bien donné un temps caractéristique correct, avec un transitoire de l'ordre de quelques τ .

EXERCICES – ÉNONCÉS

A. Exercice de cours

A.1 – Évolution du circuit RC série (paragraphe 1.2)

On considère un circuit composé d'un générateur idéal de tension (fem E), d'une résistance R et d'un condensateur (capacité C) et d'un interrupteur en série. Le condensateur est initialement déchargé et l'interrupteur ouvert depuis un long moment. On note u la tension aux bornes du condensateur et i l'intensité du courant à travers celui-ci (en convention récepteur).

1 – Que signifie « depuis un long moment » ?

2 – Tracer le circuit correspondant. Que valent u et i avant la bascule de l'interrupteur ?

On bascule l'interrupteur à une date prise comme $t = 0$.

3 – Que valent u et i à l'instant $t = 0^+$, juste après la bascule de l'interrupteur ?

4 – Établir l'équation différentielle régissant la tension u , puis la résoudre. Quel est le temps caractéristique de ce système du premier ordre ?

5 – Tracer l'allure de $u(t)$ et commenter.

A.2 – Le circuit RL (paragraphe 1.3)

On considère le circuit ci-contre ; avant la fermeture de l'interrupteur, $i(t < 0) = 0$. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

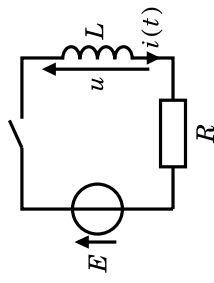
1 – Écrire les équations du circuit.

2 – Que valent i et u avant la fermeture de l'interrupteur ? Et juste après (à $t = 0^+$) ?

3 – Établir l'équation différentielle régissant $i(t)$, et identifier le temps caractéristique du système.

4 – Résoudre l'équation pour obtenir la fonction $i(t)$. Tracer l'allure de la fonction $i(t)$.

5 – Interpréter le régime permanent.



A.3 – Homogénéité

Vérifier l'homogénéité des relations suivantes.

$$(1) \quad R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$(2) \quad R_{\text{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

$$(3) \quad (R_1 + R_2) C \frac{du}{dt} + u = \frac{E}{R_1}$$

$$(4) \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \frac{du}{dt} + u = E$$

$$(5) \quad \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + Ri = \frac{E}{R}$$

$$(6) \quad i(t) = \tau \frac{E}{L} e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC$$