Oscillateurs amortis

Remarque importante

- Ce chapitre est traité sous forme de TD : vous devez savoir, à partir des énoncés distillés dans le cours, retrouver seul les solutions, sans hésitation !
- Si votre cours est flou, le corrigé est sur cdp...

Ce qu'il faut connaître

- L'équation de l'oscillateur harmonique amorti, écrite sous forme canonique (pulsation propre ω_0, facteur de qualité Q ou coefficient d'amortissement λ).
- Donner les trois types de régimes transitoires suivant de la valeur du facteur de qualité ; savoir la forme des solutions générales de l'équation canonique sans second membre dans les 3 cas.
- Tracer pour chacun des régimes précédents l'allure de la réponse (par exemple pour les CI $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 > 0$).
- Dans quel cas le régime transitoire est-il le plus bref ? Donner alors l'ordre de grandeur de sa durée en fonction de la pulsation propre.
- Quel est le paramètre qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations dans le régime transitoire pseudopériodique ?
- Quelle est l'expression de la durée d'une éventuelle oscillation (en fonction de ω_0 et Q) ?

Ce qu'il faut savoir faire

Mener l'étude d'un système du second ordre en régime transitoire amorti :
- obtenir l'équation du mouvement, l'écrire sous forme canonique, identifier Q ou λ et ω_0,
- la résoudre complètement pour une valeur du facteur de qualité Q donnée (les conditions initiales étant données, par exemple $x(t = 0) = 0$ et $v(t = 0) = v_0$),
- tracer l'allure de la solution.

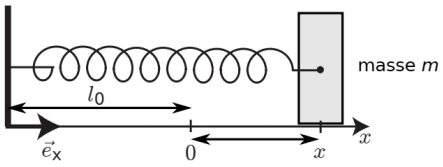
- Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.

I. Exemples simples d'oscillateurs amortis

1. Mises en équation

•EC1 - Système masse-ressort horizontal avec frottements

On considère le système ci-contre. On se place dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements sont modélisés par une force s'exerçant sur la masse dont l'expression est $\vec{f} = -\alpha\vec{v}, \alpha > 0$ étant une constante. Le ressort est de raideur k et de longueur à vide l_0.



1 - Faire un bilan des forces sur le système {masse}, appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire l'équation portant sur la position $x(t)$.

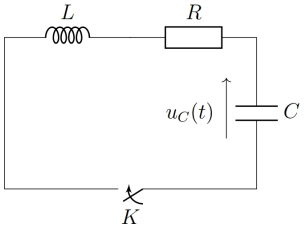
2 - Mettre cette équation sous la forme canonique

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Donner alors l'expression du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 en fonction de λ, m et k.

• EC2 - RLC série, évolution de $q(t)$:

On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement chargé (charge $q(t = 0) = Q_0$). Pour $t < 0$ le circuit est ouvert. Il est refermé à $t = 0$: le condensateur va se décharger.



1 - Exprimer u_c, u_L et u_R en fonction de la charge $q(t)$ du condensateur.

2 - En déduire l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.

3 - La mettre sous la même forme que pour le système masse-ressort.

Bilan : Formes canoniques pour un système du 2nd ordre

• Avec le facteur de qualité :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = K \text{ avec } \begin{cases} \text{- K le second membre, constant dans ce chapitre.} \\ \text{- } \omega_0 \text{ la } \textbf{pulsation propre} \text{ du système. Unité :} \\ \text{- } Q \text{ le } \textbf{facteur de qualité}. \text{ Unité :} \end{cases}$$

On définit la **fréquence propre** $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ et la période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

• Avec le coefficient d'amortissement λ :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = K} \text{ avec}$$

- Démonstration des unités de ω_0, Q et λ :

$\rightsquigarrow$ Que devient l'équation lorsque $Q \to \infty$? Quelle équation retrouve-t-on ? C'est pour cela que l'on parle de facteur de qualité.

2. Résolution l'équation de l'oscillateur amorti, les CI étant données

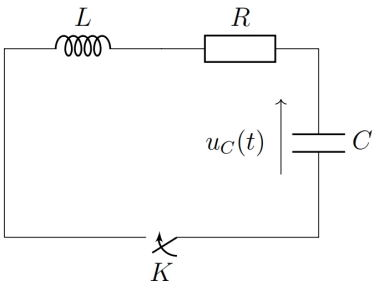
Les résultats sont sur la fiche de maths sur les équations différentielles usuelles en physique, partie sur les équations d'ordre 2 ! A savoir retrouver à partir de l'équation caractéristique.

• **EC3 :** On considère l'équation $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, et les conditions initiales : à $t = 0, x(0) = 0$ et $v(0) = v_0 > 0$.

$\begin{cases} \text{- Déterminer } x(t) \text{ (on précisera l'expression des constantes d'intégration),} \\ \text{- Tracer l'allure de la solution,} \\ \text{- Donner un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.} \end{cases}$ pour chacun des trois cas : $\begin{cases} 1 - Q > 1/2. \\ 2 - Q < 1/2. \\ 3 - Q = 1/2. \end{cases}$

4 - Conclure : quel facteur de qualité choisir pour atteindre le plus rapidement l'équilibre ?

• **EC4 - Décharge du RLC série :**



On étudie le circuit ci-contre, où le condensateur est initialement chargé : $U_c(0^-) = U_0$. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert. Il est refermé à $t = 0$.

1 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. On l'écrira sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

2 - On prend $L = 10\text{mH}, C = 10\text{nF}$ et $R = 100\Omega$. Donner les valeurs de la pulsation propre et du facteur de qualité.

3 - Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle. Faire l'application numérique pour le temps d'amortissement et pour la pseudo-période.

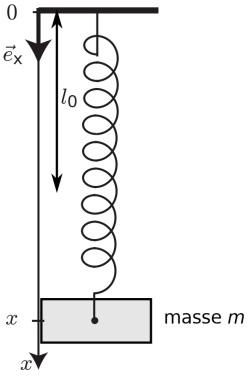
4- Que valent u_c et $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ à $t = 0$? Justifier soigneusement. En déduire l'expression des constantes A et B qui apparaissent dans la solution générale.

5 - Tracer l'allure de la solution.

6 - Exprimer $i(t)$ et tracer son allure.

7 - Aspect énergétique : Comment faire un bilan de puissance à partir de l'équation des mailles ? Le faire, identifier les différents termes.

• **EC5 - Système masse-ressort vertical**



On considère une masse m attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le tout est vertical. La masse est soumise à des frottements visqueux, dont l'action est modélisée par une force du type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

1 - Déterminer l'équation différentielle suivie par la position $x(t)$.

2 - Quelle est la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$?

3 - On pose $u(t) = x(t) - x_{\text{éq}}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.

4 - On se place dans le cas de l'enregistrement de la figure ci-dessous. Dans quel type de régime le système est-il ? Donner un ordre de grandeur de son facteur de qualité.

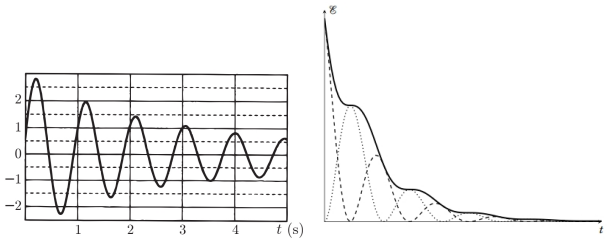
5 - Montrer que les solutions générales s'écrivent $u(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$, avec $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

6 - À l'instant initial la masse est en $x = x_{\text{éq}}$, et on lui communique une vitesse initiale v_0 vers le bas. Déterminer l'expression des constantes A et B.

On définit le décrément logarithmique comme $\delta = \ln\frac{u(t)}{u(t+T)}$ avec $T = 2\pi/\Omega$ la pseudo-période.

7 - Montrer théoriquement que δ est constant tout au long du mouvement.

8 - Exploiter le graphique entre les "pics" 1 et 4 pour en déduire une estimation des valeurs de la pseudo-période et du facteur de qualité.



9 - Aspect énergétique : Comment faire un bilan de puissance à partir de l'équation du mouvement ? Le faire, identifier les différents termes.

10 - On a représenté ci contre les allures des énergies cinétique, potentielle et mécanique. Identifier chacune des courbes et justifier les tangentes horizontales à la courbe en gras.

Remarque importante : Influence de Q sur la pseudo période :

Dès que $Q \geqslant 5$ (voire 2 si on peut se contenter d'une approximation grossière)

$\boxed{\Omega \simeq \omega_0 \text{ et } Q \text{ est le nombre de pseudopériodes dans le transitoire}}$

On voit bien cette évolution sur les graphiques suivants (en gris la solution harmonique correspondante, de pulsation ω_0) :

