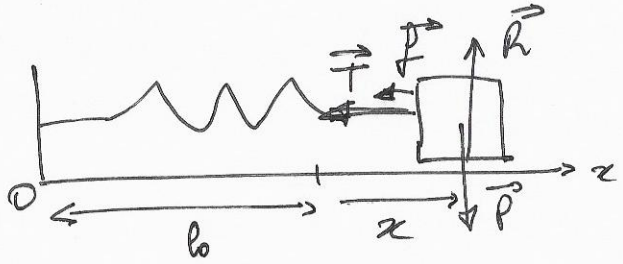
**EC1**




1] PFD pour la masse dans RTSG, en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -k(l-l_0) - \alpha\dot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \qquad (l = l_0 + x)$$

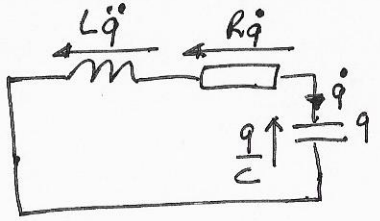
$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} = 0}$$

2] Par identification, $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

De même $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}}$

**EC2**

1]




$$\begin{cases} u_c = \frac{q}{C} \\ u_R = Ri = R\dot{q} \\ u_L = L\frac{di}{dt} = L\ddot{q} \end{cases}$$

2] Ldm : $u_L + u_R + u_c = 0$

$$\Leftrightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0}$$

on a $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$, et $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \boxed{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q}$

Rque : Dans les 2 cas, Q est inversement proportionnel au terme responsable de la dissipation d'énergie ($R$ ou $\alpha$) $\Rightarrow$ Plus Q est grand, moins il y a de perte d'énergie

EC3

## Résolution de $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

① Equation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) = \frac{\omega_0^2}{Q^2}(1-4Q^2)$ $\Rightarrow \Delta = 0$ si $Q = \frac{1}{2}$

**Cas 1 : $Q > \frac{1}{2}$** alors $\Delta < 0$, et les racines de l'eq caract sont $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$

On pose $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ (pseudo pulsation)

Alors les solutions générales sont du type

$$\boxed{x = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}$$

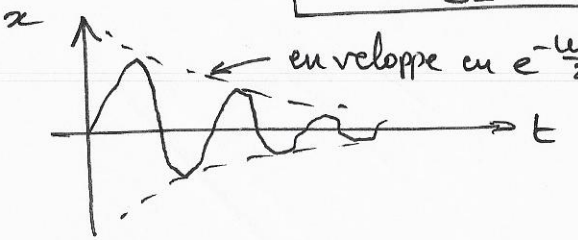
oscillations amorties, temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ $\left(> \frac{1}{\omega_0}\right.$ car $\left.Q > \frac{1}{2}\right)$

Application des CI :

- $x(0) \overset{CI}{=} 0 \overset{SG}{=} A$
- Alors $\dot{x} = B\Omega\cos\Omega t\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} - \frac{\omega_0}{2Q} B\sin\Omega t\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$

  donc $\dot{x}(0) \overset{CI}{=} v_0 \overset{SG}{=} B\Omega$

Finalement : $\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}$




**Cas 2 : $Q = \frac{1}{2}$** Alors $\Delta = 0$, $r_1 = r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$

les solutions sont $\boxed{x = (At+B)\, e^{-\omega_0 t}}$

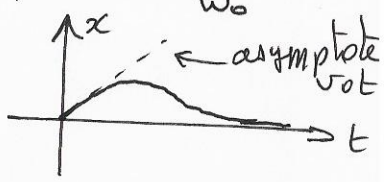
↳ amortissement, temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

Application des CI

- $x(0) \overset{CI}{=} 0 \overset{SG}{=} B$
- $\dot{x}(t) = A\, e^{-\omega_0 t} - \omega_0 (At+B)\, e^{-\omega_0 t}$

  donc $\dot{x}(0) \overset{CI}{=} v_0 \overset{SG}{=} A$

Finalement : $\boxed{x(t) = v_0 t\, e^{-\omega_0 t}}$.




**Cas 3 : $Q < \frac{1}{2}$** Alors $\Delta > 0$ $\begin{cases} r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0 \end{cases}$

On a $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1-4Q^2} - 1\right) < 0$

Les 2 racines sont négatives, et $r_2 < r_1 < 0$

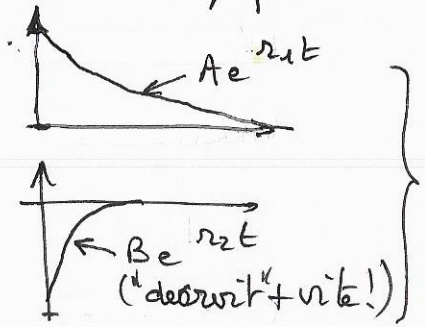
Solutions générales du type $\boxed{x = A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t}}$.

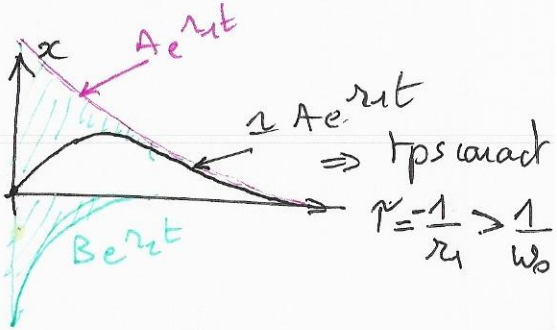
Application des CI :

- $x(0) \overset{CI}{=} 0 \overset{SG}{=} A + B$
- $\dot{x}(0) = v_0 \overset{SG}{=} r_1 A + r_2 B$

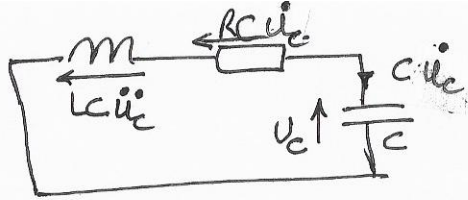
$\Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B(r_2 - r_1) = v_0 \end{cases} \Rightarrow A = -B = \underbrace{\frac{v_0}{r_2 - r_1}}_{>0}$

Séparons les 2 graphes :



**EC4** 1]




$(i = c\frac{du_c}{dt})$

Ldm : $LC\ddot{u}_c + RC\dot{u}_c + u_c = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{u}_c + \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{u_c}{LC} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0}$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \; ; \; Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

2] $\omega_0 \overset{AN}{=} \frac{1}{\sqrt{10^{-2}\times 10^{-8}}} = 10^5$ rad/s ; $Q = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{10^{-2}}{10^{-8}}} = 10 \gg \frac{1}{2}$

3] $Q > \frac{1}{2}$, régime pseudo-périodique :

Cours ! $u_c \overset{SG}{=} e^{-\lambda t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$, avec $\begin{cases}\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \\ \Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\end{cases}$ (1)

- temps d'amortissement $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0} \overset{AN}{=} 2$ s
- pseudo période $T = \frac{2\pi}{\Omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} = 6{,}2\,10^{-5}$ s

car Q grand

4] A $t=0^-$ $\begin{cases} u_c = U_0 \\ i = 0 \end{cases}$ .. Par continuité de $u_c$ : $u_c(0^+) = U_0$

" $i_L$ : $i(0^+) = 0 = c\frac{du_c}{dt}(0^+)$

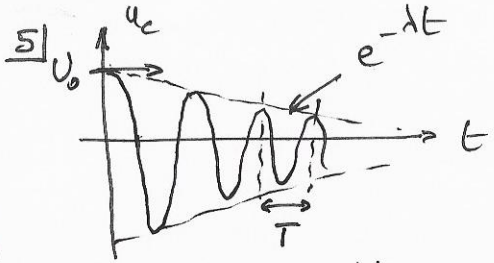
car bobine en série !

(1) donne . $u_c(0) \overset{SG}{=} A \overset{CI}{=} U_0 \Rightarrow \boxed{A = U_0}$

- $\frac{du_c}{dt} = -\lambda(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}(-\Omega A\sin\Omega t + \Omega B\cos\Omega t)$

$\frac{du_c}{dt}(0) \overset{SG}{=} -\lambda A + B\Omega \Rightarrow B = \frac{\lambda A}{\Omega} = \frac{\omega_0 U_0}{2Q\,\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \simeq \frac{U_0}{2Q}$

5]



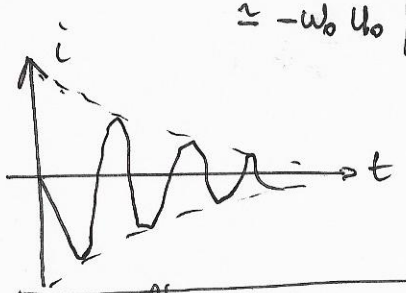

6] On a $u_c = e^{-\lambda t}\left(U_0\cos\Omega t + \frac{U_0}{Q}\sin\Omega t\right)$

sans intérêt.

donc $i_c = c\frac{du_c}{dt} = e^{-\lambda t}\left[\underbrace{(-\lambda A + B\Omega)}_{0}\cos\Omega t + (-\lambda B - \Omega A)\sin\Omega t\right]$

$\simeq -\left[\frac{\omega_0 U_0}{2Q\,2Q} + \omega_0 U_0\right]\sin\Omega t\, e^{-\lambda t}$

$\simeq -\omega_0 U_0\left[1 + \frac{1}{4Q^2}\right]\sin\Omega t\, e^{-\lambda t}$

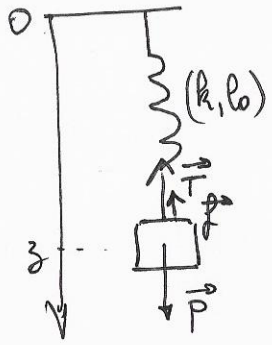



7] On multiplie la loi des mailles par l'intensité :

$L\frac{di}{dt}\times i + Ri^2 + \frac{q}{C}\times i = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2C}q^2}_{\text{Energies stockées}}\right) = \underbrace{-Ri^2}_{\text{Puissance dissipée dans la résistance}}$

**EC5** 1) PFD appliqué à m dans RTSG, en proj sur $Oz$ descendant :




$m\ddot{z} = -k(l-l_0) - \lambda\dot{z} + mg$ astuce !

$\Leftrightarrow m\ddot{z} = -k\left(z - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)\right) - \lambda\dot{z}$ (1)

$z_{eq}$ apparaît

2) Equilibre $\Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0 \Rightarrow \boxed{z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$

3) (1) $\Leftrightarrow m\ddot{z} = -k(z - z_{eq}) - \lambda\dot{z}$. Avec $u = z - z_{eq}$, on a $m\ddot{u} + \lambda\dot{u} + ku = 0$ (2)

4) Oscillations $\Rightarrow$ régime pseudo périodique

$Q \simeq$ nbre d'oscill $\simeq 5$

5) (2) $\Leftrightarrow \ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, de discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) \leq 0$ car pseudo périodique

$\Rightarrow$ solutions complexes $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$

$\overset{\text{énoncé}}{=} -\lambda \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\lambda \pm i\Omega$

La solut° générale complexe est du type $\underline{A}e^{r_1 t} + \underline{B}e^{r_2 t}$ :

$\underline{u}(t) = e^{-\lambda t}\left(\underline{A_1}e^{i\Omega t} + \underline{B_1}e^{-i\Omega t}\right)$

On préfère travailler en réels et prendre 1 SG de la forme

$u(t) = e^{-\lambda t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$

6) À $t=0$, $x = x_{eq} \Rightarrow u \overset{CI}{=} 0 \overset{SG}{=} A \Rightarrow \boxed{A = 0}$

D'où $\dot{x} \overset{SG}{=} -\lambda B\sin\Omega t\, e^{-\lambda t} + \Omega B\cos\Omega t\, e^{-\lambda t}$

donc $\dot{x}(0) \overset{SG}{=} \Omega B \overset{CI}{=} v_0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{\Omega}}$

7) savoir refaire

$u(t+T) = e^{-\lambda(t+T)}\left(A\cos\Omega\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right) + B\sin\left(\Omega\left(t + \frac{2\pi}{\Omega}\right)\right)\right)$

$= e^{-\lambda(t+T)}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$

$= e^{-\lambda T}\, u(t)$

donc $\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \ln\left(e^{\lambda T}\right) = \lambda T = \frac{\omega_0}{2Q}\frac{2\pi}{\omega_0} = \boxed{\frac{\pi}{Q} = \delta}$

↳ car $\Omega \simeq \omega_0$ pour $Q$ grand ($\gtrsim 5$)

8) savoir refaire

De même, $u(t+3T) = e^{-3\lambda T}u(t)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+3T)}\right) = 3\lambda T = \frac{3\pi}{Q} \overset{\text{dessin}}{\underset{\text{pics 1 et 4}}{=}} \ln\left(\frac{2,7}{1}\right)$

$\Rightarrow Q = \frac{3\pi}{\ln 2,7} \simeq 10$

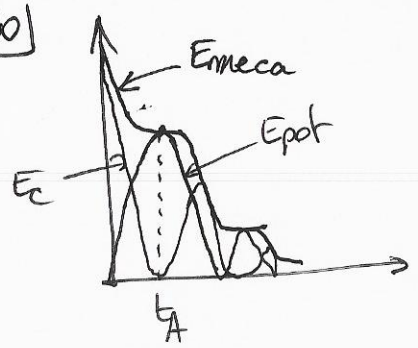
9) On multiplie l'équation du mvt par la vitesse :

$m\ddot{z}\dot{z} + k(z - l_0)\dot{z} + mg\dot{z} = -\lambda\dot{z}^2$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 - mgz\right) = -\lambda\dot{z}^2$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(E_c + E_{ressort} + E_{pesanteur}) = \text{Puissance frott}$. idem

10)




à $t_A$, $E_c = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ pas de force de frott $\Rightarrow$ pas de perte d'Eméca